

# 有限グラフ上の量子ウォークについて II：例と性質

根岸 章  
Akira Negishi

## 概要

前論文 [8] で示した諸事実をもとに, 2 部グラフへの応用を考察する.

### 1. 諸記号

まず, 前論文 [8] で導入した量子ウォークについて簡単にまとめる.

#### 1.1. グラフに関する諸記号

$G = G(V, E)$  をグラフとする. ここで  $V$  はグラフの頂点集合,  $E$  はグラフの辺集合という. グラフ  $G$  については, 単純かつ連結であるとする.  $v, w \in V$  は  $e = (v, w) \in E$  となっているとき,  $w$  は  $v$  に隣接しているといい,  $v = o(e)$  を  $e$  の始点,  $w = t(e)$  を  $e$  の終点, 両方を  $e$  の端点という. また  $e = (v, w)$  に対し,  $e^{-1} = (w, v)$  とする.  $v \in V$  に対し,  $N(v) := \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$  とする. また,  $N^{-1}(v) := \{w \in V \mid (w, v) \in E\}$  とする.

記号 1.  $V' \subset V$  に対し,

$$N_0(V') := V', \quad N_\ell(V') := \{w \in V \mid w \in N(N_{\ell-1}(V'))\} \quad (\ell = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

とする. また,

$$\bar{N}_\ell(V') = \bigcup_{s=0}^{\ell} N_s(V') \quad (2)$$

とする.  $N_\ell^{-1}(V')$ ,  $\bar{N}_\ell^{-1}(V')$  も同様に定義する. さらに,

$$\partial N_\ell(V') = N_\ell(V') \setminus \bar{N}_{\ell-1}(V') \quad (3)$$

とする.  $\partial N_\ell^{-1}(V')$  も同様に定義する.

#### 1.2. 量子ウォークの諸記号と定理

ここでは, 狭義の量子ウォークについての記号を見る.

グラフ  $G(V, E)$  とヒルベルト空間  $\mathbb{H}$  に対し,  $v \in V$  に対応した単位の分解

$$I = \sum_{v \in V} P_v, \quad P_v^2 = P_v, \quad P_v P_w = 0 \quad (v \neq w), \quad \text{Ran}(P_v) = \mathbb{H}_v$$

が定まっているとする.  $\varphi \in \mathbb{H}$  に対し,  $V(\varphi) := \{v \in V \mid \|P_v \varphi\| > 0\}$  を  $\varphi$  の台といい,

記号 2.  $\mathbb{H}_u = \{\varphi \in \mathbb{H} \mid \|\varphi\| = 1\}$ ,  $\mathbb{H}_0 = \{\varphi \in \mathbb{H} \mid |V(\varphi)| = 1\}$  とする.

$\mathbb{H}$  上のユニタリ作用素全体の集合を  $\mathcal{U}$  とする.

記号 **3.**  $\mathcal{U}_0 := \{U \in \mathcal{U} \mid \forall \varphi \in \mathbb{H}_u, V(U\varphi) \subset V(\varphi)\}$ ,  $\mathcal{U}_1 := \{U \in \mathcal{U} \mid \forall \varphi \in \mathbb{H}_u, V(U\varphi) \subset N(V(\varphi))\}$  とする.  $\mathcal{U}_1$  の元を速さ 1 のユニタリ作用素という.

ヒルベルト空間  $\mathbb{H}$  の基底が定まっているとき, 基底の入れ替えを引き起こすユニタリ作用素をシフト作用素といい, シフト作用素全体を  $\mathcal{S}$  と表す.

定義 **1.1.**  $\varphi \in \mathbb{H}_u \cap \mathbb{H}_0$ ,  $U \in \mathcal{U}_1$  に対し,  $\varphi_t = U^t \varphi$  ( $t = 1, 2, \dots$ )\*<sup>1</sup> を狭義の量子ウォークという.

前論文 [8] では, 次の事実を示した.

事実 **1.** ([8] 補題 3.2, 補題 3.3) グラフ  $G(V, E)$  を有限, 単純, 連結であるとする. ヒルベルト空間  $\mathbb{H}$  上に  $G$  に付随して決まる  $\mathcal{U}_1$  があるとき,  $G$  が条件 (G.1), (G.2) を満たすことと, 条件 (O.1), (O.2) を満たす  $U \in \mathcal{U}_1$  が存在することは同値である.

(G.1) 任意の  $v \in V$  に対し,  $|N(v)| = |N^{-1}(v)|$ .

(G.2) 任意の  $v \in V$  に対し  $\dim(\mathbb{H}_v) = |N(v)|$

(O.1) 任意の  $e = (v, w) \in E$  に対し, ある  $\varphi \in \mathbb{H}_v \cap \mathbb{H}_u$  が存在して  $P_w U \varphi = U \varphi$ . が成り立つ.

(O.2) 任意の  $e = (v, w) \in E$  に対し  $\dim(\text{Ran}(U_{v,w})) \leq 1$ .

さらに, 次の定理を示した.

定理 **1.** ([8] 定理 1) 仮定 (O.1), (O.2) を満たす  $U \in \mathcal{U}_1$  は  $U_0 \in \mathcal{U}_0$ ,  $S \in \mathcal{S}$  を用いて

$$U = U_0 S \quad (4)$$

と分解できる. 逆に,  $U = U_0 S$  となるなら  $U \in \mathcal{U}_1$  で仮定 (O.1), (O.2) を満たす.

## 2. 行列表示再考

この節では, [8] で導入した, ユニタリ作用素を行列表示を拡張する.

記号 **4.**  $U \in \mathcal{U}$ ,  $e = (v, w) \in V \times V$  に対し,  $U_e = U_{v,w} := P_w U P_v$  とする. また,  $V' \in V$  に対し  $P_{V'} := \sum_{v \in V'} P'_v$  とし,  $V_1, V_2 \subset V$  に対し,  $U_{V_1, V_2} := P_{V_2} U P_{V_1}$  とする.

ユニタリ作用素の合成は, 通常の行列の積と同様に計算できる. すなわち,  $U, U' \in \mathcal{U}$  に対し,  $V = \bigcup_{i=1}^N V_i$  と分解してユニタリ作用素を行列表示した場合,

$$(U'U)_{V_i, V_j} = \sum_{k=1}^N U'_{V_i, V_k} U_{V_k, V_j}$$

となる.

補題 **2.1.**  $U \in \mathcal{U}_1$  とする. 任意の  $v \in V$  に対し

$$V_0 = V(\{v\}), V_\ell = \partial N_\ell(V_0) \quad (\ell = 1, 2, \dots)$$

とすると

$$U = U_{V_0, V_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (U_{V_i, V_{i-1}} + U_{V_i, V_i} + U_{V_i, V_{i+1}})$$

となる.

---

\*<sup>1</sup>  $U^0 = I$  (恒等写像) とする

証明：  $V_j, V_j, |i-j| \geq 2$  とする. このとき定義より, 任意の  $v \in V_j$  に対し,  $v \notin N(V_i) \cup N^{-1}(V_i)$  となるので,  $V_j \cap (N(V_i) \cup N^{-1}(V_i)) = \emptyset$  となる.  $U \in \mathcal{U}_1$  の定義より,  $P_{V_j} U P_{V_i} = 0$  となる.  $\square$

### 3. 2部グラフへの応用

グラフ  $G(V, E)$  を 2部グラフとする. すなわち, 頂点集合  $V$  が  $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$  と 2つの部分に分けられ, 辺集合  $E$  が  $E \subset V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1$ . すなわち  $V_1$  の頂点と  $V_2$  の頂点を結ぶ辺しか存在しないグラフとする.

2部グラフにおいては,  $N(V_1) \subset V_2, N(V_2) \subset V_1$  が成り立つ. したがって, 前節の補題 2.1 の証明を参考にすれば

$$U \in \mathcal{U}_1 \text{ ならば } U_{V_1, V_1} = 0, U_{V_2, V_2} = 0$$

が成り立つ. 簡単のため  $U_{V_2, V_1} = U_1, U_{V_1, V_2} = U_2$  とすると

$$U = \begin{pmatrix} 0 & U_1 \\ U_2 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. 行列計算すると

$$U^2 = \begin{pmatrix} U_1 U_2 & 0 \\ 0 & U_2 U_1 \end{pmatrix}$$

となるが,  $U$  がユニタリであることより,  $U^2$  もユニタリ, したがって  $U_1 U_2, U_2 U_1$  もそれぞれ  $\mathbb{H}_{V_i} = P_{V_i, V_i} \mathbb{H}$  ( $i = 1, 2$ ) 上のユニタリ作用素となる. このとき, 次の定理が成り立つ.

**定理 2.**  $G$  を無向 2部グラフとし,  $|E| = n$  とする. また  $U \in \mathcal{U}_1$  とする.  $\mathbb{H}_{V_1}$  上のユニタリ作用素  $U_1 U_2$  の固有値, 固有ベクトルを  $e^{2i\theta_j}, \mathbf{q}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) とすると ( $i = \sqrt{-1}, \theta_j$  はすべて実数値),  $U_2 U_1$  の固有値, 固有ベクトルは  $e^{2i\theta_j}, U_1^* \mathbf{q}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) となる\*2.

さらに,  $U$  の固有値, 固有ベクトルは  $\pm e^{i\theta_j}, \mathbf{q}_j \pm e^{i\theta_j} U_1^* \mathbf{q}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) となる.

証明：  $G$  の仮定より,  $\dim(\mathbb{H}_{V_1}) = \dim(\mathbb{H}_{V_2}) = n$  となる. ユニタリ作用素の一般論より,  $U_1 U_2, U_2 U_1$  の固有値はすべて絶対値 1 である. このとき

$$U_1 U_2 \mathbf{q}_j = e^{2i\theta_j} \mathbf{q}_j \Leftrightarrow U_2 U_1 (U_1^* \mathbf{q}_j) = e^{2i\theta_j} (U_1^* \mathbf{q}_j)$$

となるので,  $U_1 U_2$  と  $U_2 U_1$  のスペクトルは一致し,  $U_2 U_1$  の固有ベクトルは  $U_1^* \mathbf{q}_j$  となる.

$\mathbf{q}_j$  は  $\mathbb{H}_{V_1}$  内のベクトルなので  $\mathbb{H}_{V_2}$  成分は 0, 一方  $U_1^* \mathbf{q}_j$  は  $\mathbb{H}_{V_2}$  内のベクトルなので  $\mathbb{H}_{V_1}$  成分は 0 となっている. したがって,

$$\mathbf{q}_j \pm e^{i\theta_j} U_1^* \mathbf{q}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_j \\ \pm e^{i\theta_j} U_1^* \mathbf{q}_j \end{pmatrix}$$

と表すことができる. これに  $U$  を左からかけると

$$\begin{pmatrix} 0 & U_1 \\ U_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_j \\ \pm e^{i\theta_j} U_1^* \mathbf{q}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm e^{i\theta_j} \mathbf{q}_j \\ U_2 \mathbf{q}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm e^{i\theta_j} \mathbf{q}_j \\ e^{2i\theta_j} U_1^* \mathbf{q}_j \end{pmatrix} = \pm e^{i\theta_j} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_j \\ \pm e^{i\theta_j} U_1^* \mathbf{q}_j \end{pmatrix}$$

$\square$

この定理より, 2部グラフ上の量子ウォークの問題を考察する場合, 通常の半分のサイズの行列の固有値・固有ベクトルを求めれば十分であることがわかる.

---

\*2  $A^*$  は  $A$  の随伴作用素

1 節定理 1 の  $U$  の分解は次のようになる.

基底の入れ替えは  $V_1, V_2$  間でしか起こらないので,  $U = U_0 S$  と分解すると

$$U = \begin{pmatrix} 0 & U_1 \\ U_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,0} & 0 \\ 0 & U_{2,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & S_1 \\ S_2 & 0 \end{pmatrix}$$

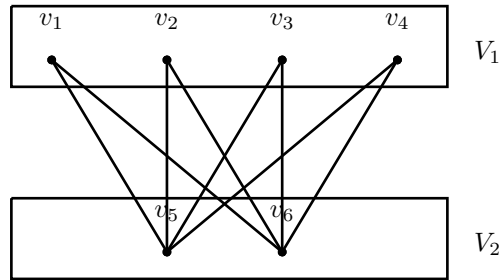
となる.  $U_{1,0}, U_{2,0} \in \mathcal{U}_0$  であり,  $V_1, V_2$  に属す各頂点内でのユニタリ変換の合成になっている.

上式の行列を計算して  $U_1 = U_{1,0} S_1, U_2 = U_{2,0} S_2$  となる. したがって固有値問題としては  $U_{1,0} S_1 U_{2,0} S_2$  を解けば十分である.

#### 4. 実例

この節では, 前節の実例として完全 2 部グラフ  $K_{4,2}$  を考察する. 完全 2 部グラフとは 2 部グラフ  $G(V, E)$  で  $V_1$  の任意の頂点と  $V_2$  の任意の頂点を結ぶ辺  $e$  が存在するグラフのことである.  $K_{4,2}$  は完全 2 部グラフで  $|V_1| = 4, |V_2| = 2$  となるものである. 図にすると下のようになる.

図 1 完全 2 部グラフ  $K_{4,2}$



このとき, 1 節事実 1 の (G.1), (G.2) を仮定すると

$$\dim(\mathbb{H}) = 16, \dim(\mathbb{H}_{V_1}) = \dim(\mathbb{H}_{V_2}) = 8$$

$$\dim(\mathbb{H}_{v_1}) = \dim(\mathbb{H}_{v_2}) = \dim(\mathbb{H}_{v_3}) = \dim(\mathbb{H}_{v_4}) = 2, \dim(\mathbb{H}_{v_5}) = \dim(\mathbb{H}_{v_6}) = 4$$

となっている.

$U \in \mathcal{U}_1$  は 16 次ユニタリ行列であり

$$U = \begin{pmatrix} 0 & U_1 \\ U_2 & 0 \end{pmatrix}$$

と表示すると,  $U_1, U_2$  はそれぞれ 8 次正方行列,  $U_1 U_2, U_2 U_1$  は 8 次ユニタリ行列となる.  $U_1, U_2$  を  $U_{1,0} S_1, U_{2,0} S_2$  と分解すると

$$U_{1,0} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 \end{pmatrix}, U_{2,0} = \begin{pmatrix} R_5 & 0 \\ 0 & R_6 \end{pmatrix}$$

となる. ここで  $R_1, R_2, R_3, R_4$  は 2 次の,  $R_5, R_6$  は 4 次のユニタリ行列である. また,  $S_1, S_2$  は 8 次単位行列の行を適当な順に並べなおしたものである.  $S_2$  は  $V_1$  の頂点に属する基底から  $V_2$  の頂点に

属する基底への入れ替えを表し, これは頂点内の基底の順番を除けば一意に確定する\*3. そこで

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

これだけの条件から決まる量子ウォークはさまざまなものが存在するので, ここではアダマールウォークに限定して考察する. アダマールウォークとはアダマール行列から作られる量子ウォークのことである. アダマール行列とは  $n$  次実正方行列  $H$  で  $H^T H = nI_n$  となるものをいう ( $A^T$  は  $A$  の転置行列). ここではさらに

$$h_0 = 1, h_k = \begin{pmatrix} h_{k-1} & h_{k-1} \\ h_{k-1} & -h_{k-1} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

というシルベスターの生成法で作られる  $h_n$  を  $2^{\frac{n}{2}}$  で割ったものを用いることにする. すなわち

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_5 = R_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

このような設定のもとでいくつかの  $S_1$  に対する量子ウォークを計算する.

(1) 基底が相互の入れ替えのみの場合

もっとも単純な場合として基底の入れ替えが  $e_i \leftrightarrow e_j$  のようになっている場合を見る. これは, 言い換えると, 基底の入れ替えサイクルがすべて 2 になっている場合である. このとき明らかに  $S_1 S_2 = I$  となるので  $S_1 = S_2^T$  すなわち

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

$$U_{1,0} S_1 U_{2,0} S_2 = 2^{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

\*3  $S_1$  のみを確定させてもよい

となる. この固有値は  $\pm 1$  (多重度それぞれ 4) となる. したがって  $U$  の固有値は

$$\pm 1, \pm i \text{ (多重度それぞれ 4)}$$

となる.  $U$  は  $U^4 = I$  を満たす.

(2) 基底の入れ替え  $V_1$  の頂点内にとどまる場合

(1) の場合を除けば, 基底の入れ替えサイクルが 2 と 4 の混合になっているか, サイクルが 4 のみになっている. サイクルが 4 のみの場合は, 頂点の番号や頂点内の基底の順番を無視すれば一つに確定する.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

$$U_{1,0}S_1U_{2,0}S_2 = 2^{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. この固有値は  $e^{i\frac{k\pi}{4}}$  ( $k = 1, 3, 5, 7$  多重度それぞれ 2) となる. したがって  $U$  の固有値は

$$e^{i\frac{k\pi}{8}} \text{ (} k = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 \text{ 多重度それぞれ 2)}$$

となる.  $U$  は  $U^{16} = I$  を満たす.

(3) 基底の入れ替えサイクルが最大 16 の場合

これもさまざまな場合に分かれる. 一つの例として  $v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_2 \rightarrow v_6 \rightarrow v_3 \rightarrow v_6 \rightarrow v_4 \rightarrow v_6 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots$  となる場合を見る. この場合は

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

$$U_{1,0}S_1U_{2,0}S_2 = 2^{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. この固有値は  $e^{i\frac{k\pi}{3}}$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ),  $\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{14}i}{4}$  となる. したがって  $U$  の固有値は

$$e^{i\frac{k\pi}{6}} (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11), \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{14}i}{4}}$$

となる.  $U$  は冪等ではない.

## 5. 終わりに

本論文では [8] で導入したグラフに付随したユニタリ作用素の行列表示を拡張し, さらに, その応用例として 2 部グラフ上の量子ウォークが, 辺の数  $n$  に対し  $2n$  次の行列計算ではなく,  $n$  次の行列計算で求められることを示した. 4 節ではその実例として完全グラフ  $K_{4,2}$  上の量子ウォークを与える速さ 1 のユニタリ作用素の固有値をいくつかの場合で計算した. これらの計算例からもわかるとおり, 基底の入れ替えに関しては, 相互の入れ替えのみ, すなわち  $S_1 S_2 = I$  となる場合が最も単純であると思われる.

「有限グラフ上の量子ウォークについて III」では, 上記の量子ウォークについて, 詳しく調べていく.

## 参考文献

- [1] D. Aharonov, A. Ambainis, J. Kempe & U. V. Vazirani, Quantum walks on graphs. Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 50-59, 2001. quant-ph/0012090.
- [2] Y. Aharonov, L. Dvidovich & N. Zagury, Quantum random walks. *Phys. Rev. A*, **48**, 1687-1690, 1993.
- [3] J. Kempe, Quantum random walks - an introductory overview. *Contemporary Physics* **44**, 307-327, 2003. quant-ph/080381.
- [4] E. Farhi & S. Gutmann, Quantum computation and decision trees. *Phys. Rev. A*, **58**, 915-928, 1998.
- [5] G. Grimmett, Probability on Graphs. IMS Textbooks 1. Cambridge Univ. Press. 2010.
- [6] S. Gudder, Quantum Probability, CA. Academic Press Inc., 1988
- [7] 今野紀雄, 量子ウォークの数理, 産業図書, 2008
- [8] 根岸章, 有限グラフ上の量子ウォークについて I: 定義と条件, 奈良産業大学情報学フォーラム紀要 第 8 巻, 99-108