『社会科学雑誌』第６巻（2012年12月）—— *223*

《論　　文》

社会的選択関数に関する覚書

山　下　雅　弘

１

本論では、Mas-colell=Whinston=Green（1995）における、アローの不可能性定理とその証明および社会的選択関数に関する命題とその証明を解説し、それらを基盤とし本文とは異なる系を導く。

２

個人が選択可能な選択肢の集合を X とし、$i = 1, \cdots, I$ と表される I 人のエージェントが存在するとする。また、

（１）反射律

　任意の $x \in X$ に対して、$x \succsim_i x$ が成立する。

（２）完備律

　任意の x，$y \in X$ に対して、$x \succsim_i y$ または $y \succsim_i x$ が成立する。

（３）推移律

　任意の x，y，$z \in X$ に対して、$x \succsim_i y$ かつ $y \succsim_i z$ ならば、$x \succsim_i z$ が成立する。

（１）～（３）すべてを満たす選好関係を合理的であるという。

すべてのエージェント i は X に関して合理的選好関係 $\succsim_i$ を持っており、

$\succsim_i$から得られる厳密な選好関係は$\succ_i$、無差別な選好関係は$\sim_i$によって示される。さらに、Xに関するすべての生じうる合理的選好関係の集合を$\mathscr{R}$としている。また、異なる２つの選択肢は個人選好関係$\succsim_i$において無差別ではないという性質を持つような、Xに関するすべての生じうる合理的選好関係の集合を$\wp$としている。$\wp$は$\mathscr{R}$の部分集合（$\wp \subset \mathscr{R}$）である。以下では、$A = \mathscr{R}^I$、$A = \wp^I$である最大領域に関して議論している。

定義21.C.1

所与の$A \subset \mathscr{R}^I$に関して定義される社会的厚生関数とは、許容領域$A \subset \mathscr{R}^I$における個人合理的選好関係の任意のプロファイル（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）に、社会的選好関係として解釈される合理的選好関係F（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）$\epsilon\ \mathscr{R}$をあてる規則$F : A \rightarrow \mathscr{R}$であるとしている。

すなわち、社会構成員の任意の合理的な個人選好関係を集計し、合理的な社会的選好関係を形成できなければならないことが示されており、合理的な個人選好に制約がないことが示されている。

定義21.C.2

任意の選択肢のペア$\{x, y\} \subset X$と任意の選好プロファイル（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）$\epsilon\ A$に対して、すべての$i$が$x \succ_i y$であるときはいつでも$x$が$y$より社会的に選好される（$x\ F_p$（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）$y$）ならば、社会的厚生関数$F : A \rightarrow \mathscr{R}$はパレーティアンであるということにしている。

すなわち、社会的厚生関数$F : A \rightarrow \mathscr{R}$はパレーティアンであるとは、社会構成員全員がある選好関係をもつと社会的選好もその選好関係と一致することが示されており、社会構成員の主権が示されている。

定義21.C.3

任意の２つの選択肢$\{x, y\} \subset X$の間の社会的選好が同じ２つの選択肢間の個人選好のプロファイルにのみ依存しているならば、領域Aに関して定義される社会的厚生関数$F : A \rightarrow \mathscr{R}$はペアワイズ独立性条件を満たすということにしている。形式的には、すべてのiが$x \succsim_i y \Leftrightarrow x \succsim_i' y$で

$y \succsim_i x \Leftrightarrow y \succsim_i' x$ である任意の選択肢のペア $\{x, y\} \subset X$ と任意の選好プロファイルのペア $(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) \in A$ と $(\succsim_1', \cdots, \succsim_I') \in A$ に対して、$x F(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) y \Leftrightarrow x F(\succsim_1', \cdots, \succsim_I') y$ で $y F(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) x \Leftrightarrow y F(\succsim_1', \cdots, \succsim_I') x$ である。x と y のみに関する個人選好順序がすべての i にとって $\succsim_i$ と $\succsim_i'$ の間で同じであるならば、x と y のみに関する社会選好順序は $F(\succsim_1, \cdots, \succsim_I)$ と $F(\succsim_1', \cdots, \succsim_I')$ の間で同じであることを示している。

すなわち、領域 A に関して定義される社会的厚生関数 $F: A \to \mathscr{R}$ がペアワイズ独立性条件を満たすとは、任意の２つの選択肢 $\{x, y\} \subset X$ 間の社会的選好は x, y 以外の選択対象に関する選好を考慮しないことが示されている。

命題21.C.1 :（アローの不可能性定理）

選択肢が少なくとも３種類あり、個人選好のプロファイルの領域 A が $A = \mathscr{R}^I$ であるかまたは $A = \wp^I$ であると仮定する。そうすると、パレーティアンでペアワイズ独立性条件を満たすすべての社会的厚生関数 $F: A \to \mathscr{R}$ は次の意味で独裁的である。任意の選択肢のペア $\{x, y\} \in X$ と任意のプロファイル $(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) \in A$ に対して、ある個人 h が x を y より厳密に選好する（$x \succ_h y$）ときは常に x が y より社会的に厳密に選好される（$x F_p(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) y$）ような１人のエージェント h が存在する[(1)]。

上記のような仮定をおくと独裁的なエージェントが存在することが言える。すなわち、社会的意思決定の過程で、定義 21.C.1、21.C.2、21.C.3で示された条件と独裁的なエージェントが存在することのうち少なくとも１つは満たされない。

(1) 社会的に選択される厳密な選好関係と同じ選好関係を持つ個人が存在することを意味する。

アローの不可能性定理が証明されている。

証明

I を人数とみなすだけでなくエージェントの集合を表すとする。この証明で使用する社会的厚生関数$F:\mathcal{A}\to\mathscr{R}$は、パレーティアンでペアワイズ独立性条件を満たすある１つの社会的厚生関数$F:\mathcal{A}\to\mathscr{R}$であるとする。また、以下では選択肢のペアと言うと常に別の選択肢であるとしている。

定義21.C.4

所与のF（・）に対して、

（ｉ）エージェントの部分集合$S\subset I$に属するすべてのエージェントがyよりxを選好し、かつSに属さないすべてのエージェントがxよりyを選好するときはいつでもxはyより社会的に選好されるならば、Sはyよりxが選好されることに関して決定的であるということにしている。

（ⅱ）Xに属する任意のペアx，yに対して、Sはyよりxが選好されることに関して決定的であるならば、Sは決定的であるということにしている。

（ⅲ）Sに属するすべてのエージェントがyよりxを選好するときはいつでも、yよりxが社会的に選好されるならば、Sはyよりxが選好されることに関して完全に決定的であるということにしている。

証明は選好順序を決定づける集合の構造を詳細に調べることによって以下のように10段階に分けて行われている。ステップ１～３では、エージェントのある部分集合が選択肢のある１つのペアの社会的選好順序が決まることに関して決定的であるならば、そのエージャントの部分集合は選択肢すべてのペアの社会的選好順序が決まることに関して決定的であることが示されている。ステップ４～６では、社会的選好を決定づける集合の集合に関するある代数学的性質を証明している。ステップ７と８では、１人のエージェントによって形成される最小である社会的選好を決定づける集合

が存在することを示すために上記の代数学的性質を用いている。ステップ９と10では、そのようなエージェントが独裁者であることを示している。

ステップ１

ある$\{x, y\} \subset X$に対して、$S \subset I$がyよりxが選好されることに関して決定的であるならば、x以外の任意の選択肢zに対して、Sはzよりxが選好されることに関して決定的である。同様に、任意の$z \neq y$に対して、Sはyよりzが選好されることに関して決定的である。

ステップ１の証明

Sがyよりxが選好されることに関して決定的であるならば、Sがx以外の任意の選択肢zよりxが選好されることに関して決定的であることを示している。

$z = y$であるならば証明することはない。故に、$z \neq y$であると仮定する。すべての$i \in S$が$x \succ_i y \succ_i z$であり、すべての$i \in I \setminus S$が$y \succ_i z \succ_i x$であるような選好プロファイル$(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) \in A$を考える。$S$は$y$より$x$が選好されることに関して決定的であるから、$y$より$x$が社会的に選好される（$x F_p (\succsim_1, \cdots, \succsim_I)\ y$）。さらに、すべての$i \in I$が$y \succsim_i z$であり$F(\cdot)$はパレーティアンであるから、$y F_p (\succsim_1, \cdots, \succsim_I)\ z$である。故に、社会的選好の推移性より、$z$より$x$が社会的に選好される（$x F_p (\succsim_1, \cdots, \succsim_I)\ z$）。したがって、ペアワイズ独立性条件より、$S$に属するすべてのエージェントが$z$より$x$を選好し、$S$に属さないすべてのエージェントが$x$より$z$を選好するときはいつでも、社会的に$x$は$z$より選好される。すなわち、$S$は$z$より$x$が選好されることに関して決定的である。

同様に、Sがyよりxが選好されることに関して決定的であるならば、Sがyよりy以外の任意の選択肢zが選好されることに関して決定的であることを示す。

$z = x$であるならば証明することはない。故に、$z \neq x$であると仮定する。すべての$i \in S$が$z \succ_i x \succ_i y$であり、すべての$i \in I \setminus S$が$y \succ_i z \succ$

$_i\,x$ であるような選好プロファイル（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）$\epsilon\ A$ を考える。S は y より x が選好されることに関して決定的であるから、y より x が社会的に選好される（$x\ F_p$（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）$y$）。さらに、すべての $i\ \epsilon\ I$ が $z \succsim_i x$ でありF（・）はパレーティアンであるから、x より z が社会的に選好される（$z\ F_p$（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）$x$）。故に、社会的選好関係の推移性より、$y$ より z が社会的に選好される（$z\ F_p$（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）$y$）。ペアワイズ独立性条件より、$S$ に属するすべてのエージェントが y より z を選好し、S に属さないすべてのエージェントが z より y を選好するときはいつでも、社会的に z は y より選好される。すなわち、S は y より z が選好されることに関して決定的である。

ステップ２

ある｛x，y｝$\subset X$ に対して、$S \subset I$ が y より x が選好されることに関して決定的であり z は３つめの選択肢であるならば、$w\ \epsilon\ X$ が z ではない任意の選択肢であるとすると、S は w より z が選好されることと z より w が選好されることに関して決定的である。

ステップ１より、S は z より x が選好されることと y より z が選好されることに関して決定的である。ところが、ステップ１を｛x，z｝と w に適用すると、ある｛x，z｝$\subset X$ に対して、$S \subset I$ が z より x が選好されることに関して決定的であるならば、z ではない任意の選択肢 w に対して、S は z より w が選好されることに関して決定的である。同様に、ステップ１を｛z，y｝と w に適用すると、ある｛z，y｝$\subset X$ に対して、$S \subset I$ が y より z が選好されることに関して決定的であるならば、z ではない任意の選択肢ｗに対して、S は w より z が選好されることに関して決定的である。

ステップ３

ある｛x，y｝$\subset X$ に対して、$S \subset I$ が y より x が選好されることに関して決定的であるならば、S は決定的である。

これはステップ２の結果と x または y とは別の選択肢 z が存在することから導かれる。

任意のペア v と w を考える。$v = z$ または $w = z$ ならば、ステップ２より直接ステップ３を得る。$v \neq z$ かつ $w \neq z$ ならば、ステップ２より、S は w より z が選好されることに関して決定的となる。さらに、ステップ１より、ペア $\{z, w\} \subset X$ に対して、$S \subset I$ が w より z が選好されることに関して決定的であるならば、任意の $v \neq w$ に対して、S は w より v が選好されることに関して決定的となる。

ステップ４

$S \subset I$ と $T \subset I$ が決定的であるならば、$S \cap T$ は決定的である。

任意の３つの異なる選択肢 $\{x, y, z\} \subset X$ を考える。また、次のような選好関係を持つ選好プロファイル $(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) \in A$ を考える。S のうち S と T の共通部分を除いた部分に属するすべての $i \in S \setminus (S \cap T)$ は $z \succ_i y \succ_i x$、S と T の共通部分に属するすべての $i \in S \cap T$ は $x \succ_i z \succ_i y$ である。さらに、T のうち S と T の共通部分を除いた部分の集合に属するすべての $i \in T \setminus (S \cap T)$ は $y \succ_i x \succ_i z$、I のうち S または T の部分を除いた部分の集合に属するすべての $i \in I \setminus (S \cup T)$ は $y \succ_i z \succ_i x$ である。$S\ (= [S \setminus (S \cap T)] \cup (S \cap T))$ は決定集合であるから $z\ F_p\ (\succsim_1, \cdots, \succsim_I)\ y$ である。同様に、$T (= [T \setminus (S \cap T)] \cup (S \cap T))$ は決定集合であるから $x\ F_p\ (\succsim_1, \cdots, \succsim_I)\ z$ である。故に、社会的選好の推移性より、$x\ F_p\ (\succsim_1, \cdots, \succsim_I)\ y$ を得る。したがって、ペアワイズ独立性条件より、$S \cap T$ が y より x が選好されることに関して決定的であり、故にステップ３より $S \cap T$ が決定的である。

ステップ５

任意の $S \subset I$ に対して、S かその補集合 $I \setminus S \subset I$ のどちらか一方は決定的である。

任意の３つの異なる選択肢 $\{x, y, z\} \subset X$ を考える。また、次のよ

うな選好関係を持つ選好プロファイル（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$） ϵA を考える。すべての $i \epsilon S$ は $x \succ_i z \succ_i y$、すべての $i \epsilon I \setminus S \subset I$ は $y \succ_i x \succ_i z$ である。そうすると、$x F_p$（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$） y であるか $y F_p$（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$） x であるかの２つの可能性がある。前者の場合、ペアワイズ独立性条件より、S は y より x が選好されることに関して決定的であり、故にステップ３より S は決定的である。後者の場合、パレーティアンの条件より $x F_p$（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$） z を得るから、選好関係の推移性より $y F_p$（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$） z を得る。ところが、再びペアワイズ独立性条件を使うと $I \setminus S$ は z より y が選好されることに関して決定的であり、故にステップ３より $I \setminus S$ は決定的である。

ステップ６

$S \subset I$ が決定的であり $S \subset T$ であるならば、T も決定的である。

$I \setminus T$ が決定的であると仮定する。ステップ４より、$S \subset I$ と $I \setminus T \subset I$ が決定的であるならば、空集合である $S \cap$（$I \setminus T$）が決定的となる。よって、$I \setminus T$ は決定的ではない。故に、ステップ５より T は決定的である。

ステップ７

$S \subset I$ が決定的であり S に２人以上の個人が含まれるならば、決定的である S の厳密な部分集合 S'（$S' \subset S,\ S' \neq S$）が存在する。

任意の $h \epsilon S$ を考える。$S \setminus \{h\}$ が決定的であるならば、$S' = S \setminus \{h\}$ と考えるとステップ７は言える。$S \setminus \{h\}$ が決定的でない場合には、ステップ５より、$I \setminus (S \setminus \{h\}) =$（$I \setminus S$）$\cup \{h\}$ は決定的である。したがって、ステップ４より、$S \subset I$ と［（$I \setminus S$）$\cup \{h\}$］$\subset I$ が決定的であるならば、$\{h\} = S \cap$［（$I \setminus S$）$\cup \{h\}$］も決定的である。$\{h\}$ は S の厳密な部分集合であるから $S' = \{h\}$ と考えるとステップ７は言える。

ステップ８

$S = \{h\}$ が決定的であるような１人の $h \epsilon I$ が存在する。

社会的厚生関数 $F : A \to \mathscr{R}$ がパレーティアンであるから、すべてのエージェントの集合 I は決定的である。ステップ７を繰り返し適用し、決定的

である集合のメンバーを縮小し続けると、集合 I が有限であるから最終的に決定的であるメンバーが１人になる。

ステップ９

$S \subset I$ が決定的であるならば、任意の $\{x, y\} \subset X$ に対して、S は y より x が選好されることに関して完全に決定的である。

任意の $T \subset I \setminus S$ に対して、S のすべてのエージェントが y より x を選好し、T のすべてのエージェントは x が y と少なくとも同じぐらい好ましいと考え、その他のすべてのエージェントは x より y を選好するときはいつでも、x が y より社会的に選好されることを証明する。このことを証明するために x と y とは別の第３の選択肢 $z \in X$ を考える。ペアワイズ独立性条件より、すべての $i \in S$ は $x \succ_i z \succ_i y$、すべての $i \in T$ は $x \succ_i y \succ_i z$、すべての $i \in I \setminus (S \cup T)$ は $y \succ_i z \succ_i x$ である選好プロファイル $(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) \in A$ を考える。ステップ６より、$S \subset I$ が決定的で $S \subset (S \cup T)$ であるから $S \cup T$ も決定的である。よって、$x F_p(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) z$ である。S は決定的であるから $z F_p(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) y$ である。故に、社会的選好の推移性より、$x F_p(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) y$ を得る。

ステップ10

ある $h \in I$ に対して $S = \{h\}$ が決定的であるならば、h は独裁的な者である。

ステップ８と９より、$\{h\}$ が決定的であるならば、任意の y より任意の x が選好されることに関して完全に決定的である。すなわち、選好プロファイル $(\succsim_1, \cdots, \succsim_I)$ が $x \succ_h y$ であるようなものならば、$x F_p(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) y$ である。これは $h \in I$ が独裁的な者であることを意味する。

3

定義21.E.1

任意の部分集合 $A \subset \mathscr{R}^I$ が与えられると、A に関して定義された社会的

選択関数$f: A \to X$はAの個人選好のあらゆるプロファイルに選択された要素$f(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) \in X$をあてるものであるとしている。

定義21.E.2

任意のプロファイル$(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) \in A$に対して、選択$f(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) \in X$が弱いパレート最適であるならば、$A \subset \mathcal{R}^I$に関して定義される社会的選択関数$f: A \to X$は弱いパレーティアンであるということにする。すなわち、あるペア$\{x, y\} \subset X$に対して、すべてのiが$x \succ_i y$であるならば、$y \neq f(\succsim_1, \cdots, \succsim_I)$である。

定義21.E.3

すべてのiとすべての$y \in X$に対して、$x \succsim_i y \Rightarrow x \succsim_i{}' y$ならば、選択肢$x \in X$はプロファイル$(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) \in \mathcal{R}^I$から$(\succsim_1{}', \cdots, \succsim_I{}') \in \mathcal{R}^I$に移行するときその位置を維持するということにしている。

定義21.E.4

$(\succsim_1, \cdots, \succsim_I)$から$(\succsim_1{}', \cdots, \succsim_I{}')$に移行するときに選択された選択肢$x = f(\succsim_1, \cdots, \succsim_I)$がその位置を維持する性質があるような任意の2つのプロファイル$(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) \in A$と$(\succsim_1{}', \cdots, \succsim_I{}') \in A$に対して、$f(\succsim_1{}', \cdots, \succsim_I{}') = x$を得るならば、$A \subset \mathcal{R}^I$に関して定義される社会的選択関数$f: A \to X$は単調であるということにしている。

定義21.E.5

すべてのプロファイル$(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) \in A$に対して、$f(\succsim_1, \cdots, \succsim_I)$は$\succsim_h$に関して最も選好される選択肢である$(f(\succsim_1, \cdots, \succsim_I) \in \{x \in X$：すべての$y \in X$に対して、$x \succsim_h y\})$ならば、社会的選択関数$f: A \to X$に対してエージェント$h \in I$が独裁的な者であるということにする。独裁的な者を認める社会的選択関数のことを独裁的であるということにしている。

$A = \mathcal{R}^I$である場合に、社会的選択関数$f(\succsim_1, \cdots, \succsim_I)$が独裁的であるとする。定義 21.E.2より、ある選択肢のペア$\{x, y\} \subset X$に対して、すべてのエージェントが$x \succ_i y$であるならば、$y \neq f(\succsim_1, \cdots, \succsim_I)$である。

すなわち、任意のプロファイル（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） ϵ A に対して、選択 f（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） ϵ X が弱いパレート最適であるから、$A=\mathscr{R}^I$ に関して定義される独裁的な社会的選択関数 $f(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ は弱いパレーティアンである。また、定義21.E.4より、（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）から（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）に移行するときに選択された選択肢 $x=f$（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）がその位置を維持する性質があるような任意の２つのプロファイル（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） ϵ A と（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$） ϵ A に対して、f（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$） $=x$ を得る。よって、$A=\mathscr{R}^I$ に関して定義される独裁的な社会的選択関数 f（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）は単調である。

$A=\wp^I$ である場合に、社会的選択関数 f（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）が独裁的であるとする。定義 21.E.2より、ある選択肢のペア $\{x, y\}\subset X$ に対して、すべてのエージェントが $x\succ_i y$ であるならば、$y\neq f$（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）である。すなわち、任意のプロファイル（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） ϵ A に対して、選択 f（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） ϵ X が弱いパレート最適であるから、$A=\wp^I$ に関して定義される独裁的な社会的選択関数 $f(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ は弱いパレーティアンである。また、定義21.E.4より、（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）から（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）に移行するときに選択された選択肢 $x=f$（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）がその位置を維持する性質があるような任意の２つのプロファイル（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） ϵ A と（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$） ϵ A に対して、f（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$） $=x$ を得る。よって、$A=\wp^I$ に関して定義される独裁的な社会的選択関数 f（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）は単調である。

命題21.E.1

選択肢の数が少なくとも３つあり、認められうる選好プロファイルの領域が $A=\mathscr{R}^I$ か $A=\wp^I$ であると仮定する。そうすると、すべての弱いパレーティアンで単調な社会的選択関数 $f: A\rightarrow X$ は独裁的である。

証明

証明はアローの不可能性定理の系として得られる。このため、すべてのプロファイル（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） ϵ A に対して、f（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）を合理化する

社会的厚生関数F（・）を導入する。それから、F（・）がアローの不可能性定理の仮定を満たし、故にこの命題の結論が得られることを示している。

定義21.E.6

$X' \subset X$とプロファイル（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）$\epsilon\ \mathscr{R}^I$が与えられるとき、すべての$i$が$x\ \epsilon\ X'$と$y \notin X'$に関して$x \succ_i{}'\ y$、すべての$x, y\ \epsilon\ X'$に関して$x \succsim_i y \Leftrightarrow x \succsim_i{}'\ y$ならば、プロファイル（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）は（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）から$X'$をトップへ移動させるということにする。

言葉で表現すると、X'に属するすべての選択肢間の選好順序を変化させることなしにそれらの選択肢をトップへ移動させるだけで選好関係$\succsim_i$から$\succsim_i{}'$が得られるということである。X'に属さない選択肢の選好順序は問われない。例えば、$x \succ_i y \succ_i z \succ_i w$ならば、$y \succ_i{}'\ w \succ_i{}'\ z \succ_i{}'\ x$によって定義される選好関係$\succ_i{}'$は$\succ_i$から$\{y, w\} \subset X'$をトップへ移動させていることになる。また、（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）が（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）から$X'$をトップへ移動させるならば、すべての$x\ \epsilon\ X'$は（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）から（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）へ移行するときその位置を維持することになる。以下証明が７段階で行われている。

ステップ１

プロファイル（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）$\epsilon\ A$と（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）$\epsilon\ A$は（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）から$X' \subset X$をトップへ移動させるならば、$f$（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）$= f$（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）である。

すべてのiと$x\ \epsilon\ X'$に対して、$\{y\ \epsilon\ X: x \succsim_i{}'\ y\} = \{y\ \epsilon\ X: x \succsim_i y\} = \{y\ \epsilon\ X: x \succsim_i y\} \cup X \setminus X'$である。弱いパレートの性質より、$f$($\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）$\epsilon\ X'$である。こうして、($\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）から（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）へ移行するとき$f$（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）$\epsilon\ X'$はその位置を維持する。故に、$f$（・）の単調性より、$f$（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）$= f$（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）である。

ステップ2

F（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）を定義する。

すべてのプロファイル（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） ϵ A に対して、X に関するある２項関係 F（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）を定義する。特に、$x = y$ であるか、（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$） ϵ A が $\{x, y\} \subset X$ を（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）からトップへ移動させる任意のプロファイルであるときに $x = f(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}')$ であるならば、x F（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） y であるとする。これが $\{x, y\} \subset X$ を用いた F（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）の定義である。ステップ１より、選択される特定のプロファイル（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）から独立にうまく定義されている。

ステップ３

すべてのプロファイル（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） ϵ A に対して、F（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）は合理的選好関係である。

さらに、どの２つの異なる選択肢も社会的に無差別ではない（F（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） ϵ $\wp$)。

f（$\cdot$）は弱いパレーティアンであるから、（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）は $\{x, y\}$ を（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）からトップへ移動させるとき、$f(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}')$ ϵ $\{x, y\}$ でなければならない。故に、x F（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） y であるか y F（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） x であるが、ステップ１より $x = y$ でないならば両方は満たされず、どの２つの異なる選択肢も社会的に無差別ではない（F（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） ϵ $\wp$)。特に、F（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）の完備性が言えている。

F（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）の推移性を証明するために、$x$ F（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） y かつ y F（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） z であると仮定する。$\{x, y, z\}$ は異なる３つの選択肢であると仮定する。（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） ϵ A は $\{x, y, z\}$ を（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）からトップへ移動させるプロファイルであるとする。f（$\cdot$）は弱いパレーティアンであるから、f（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$） ϵ $\{x, y, z\}$ をえる。

仮に $y = f$（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）であると仮定する。$\{x, y\}$ を（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）からトップへ移動させるプロファイル（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$） ϵ A を考える。（$\succsim_1,\cdots,\succsim_I$）から（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$）へ移行するとき y はその位置を維持するから、社会的選択関数 f（$\cdot$）の単調性より、f（$\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}'$） $= y$

である。ところが、$(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}')$ はまた $(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ から $\{x, y\}$ をトップへ移動させたプロファイルでもある。すなわち、$(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ から $(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}')$ へ移行するとき、トップ２つの選択肢 x と y の選好順序は変化していない。$(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}')$ において $y \succ_i x$ であるから、$(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ においても $y \succ_i x$ であったはずである。故に、$y F(\succsim_1,\cdots,\succsim_I) x$ と言える。このことは $x F(\succsim_1,\cdots,\succsim_I) y$, $x \neq y$ という仮定に矛盾する。故に、$y \neq f(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ である。

同様に、仮に $z = f(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ であると仮定する。$\{y, z\}$ を $(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ からトップへ移動させるプロファイル $(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}') \epsilon A$ を考える。$(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ から $(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}')$ へ移行するとき z はその位置を維持するから、社会的選択関数 $f(\cdot)$ の単調性より、$f(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}') = z$ である。ところが、$(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}')$ はまた $\{y, z\}$ を $(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ からトップへ移動させたプロファイルでもある。すなわち、$(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ から $(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}')$ へ移行するとき、トップ２つの選択肢 x と y の選好順序は変化していない。$(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}')$ において $z \succ_i y$ であるから、$(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ においても $z \succ_i y$ であったはずである。故に、$z F(\succsim_1,\cdots,\succsim_I) y$ と言える。このことは $y F(\succsim_1,\cdots,\succsim_I) z$, $y \neq z$ という仮定に矛盾する。故に、$z \neq f(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ である。

残された唯一の可能性は $x = f(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ である。$(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}') \epsilon A$ は $\{x, z\}$ を $(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ からトップへ移動させるとする。$(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ から $(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}')$ へ移行するとき、x はその位置を維持するので $x = f(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}')$ となる。ところが、$(\succsim_1{}',\cdots,\succsim_I{}')$ はまた $\{x, z\}$ を $(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ からトップへ移動させたプロファイルでもある。よって、$x F(\succsim_1,\cdots,\succsim_I) z$ となり推移性が証明されている。

ステップ４

社会的厚生関数 $F: A \to \wp$ は $f: A \to X$ を合理化する。すなわち、すべてのプロファイル $(\succsim_1,\cdots,\succsim_I) \epsilon A$ に対して、$f(\succsim_1,\cdots,\succsim_I)$ は X にお

けるF（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）に対する最も選好される選択肢である。

このことは、F（·）がf（·）から構築されているので直観的に言える。$x = f$（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）であるとし、$y \neq x$が任意の他の選択肢であるとする。{ x, y }を（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）$\epsilon A$からトップへ移動させるプロファイル（$\succsim_1$ ´$, \cdots, \succsim_I$ ´）ϵAを考える。（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）から（$\succsim_1$ ´$, \cdots, \succsim_I$ ´）へ移行するときxはその位置を維持するから、$x = f$（$\succsim_1$ ´$, \cdots, \succsim_I$ ´）を得る。故に、$x F$（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）$y$である。ステップ2の$F$（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）の定義とステップ3のどの2つの異なる選択肢も社会的に無差別ではない（F（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）$\epsilon \wp$）ことからステップ4は言えている。

ステップ5

社会的厚生関数$F: A \to \wp$はパレーティアンである。

すべてのiが$x \succ_i y$であるならば、f（·）がパレーティアンであるから、（$\succsim_1$ ´$, \cdots, \succsim_I$ ´）が{ x, y }を（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）からトップへ移動させるときはいつでも$x = f$（$\succsim_1$ ´$, \cdots, \succsim_I$ ´）でなければならない。故に、$x F$（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）$y$であり、ステップ3のどの2つの異なる選択肢も社会的に無差別ではない（F（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）$\epsilon \wp$）ことより$x F_p$（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）$y$であり、$F: A \to \wp$はパレーティアンであると言えている。

ステップ6

社会的厚生関数$F: A \to \wp$はペアワイズ独立性条件を満たす。

これはステップ1から導かれる。すべてのiが{ x, y }に関して（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）$\epsilon A$と（$\succsim_1$ ´$, \cdots, \succsim_I$ ´）ϵAの間で同じ選好順序をもっているとする。（すなわち、すべてのiにとって$x \succsim_i y \Leftrightarrow x \succsim_i$ ´ yである。）（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）$\epsilon A$は（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）から{ x, y }をトップへ移動させると仮定し、例えば、$x = f$（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）であると仮定する。そうすると、$x F$（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）$y$である。ところが、（$\succsim_1, \cdots, \succsim_I$）は{ x, y }を（$\succsim_1$ ´$, \cdots, \succsim_I$ ´）からトップへ移動させたプロファイルでもある。故に、$x F$（$\succsim_1$ ´$, \cdots, \succsim_I$ ´）yである。選択肢の任意のペア{ x, y }$\subset X$と、すべてのiにとってx

$\gtrsim_i y \Leftrightarrow x \gtrsim_i{}' \ y$という性質をもつ任意の選好プロファイル（$\gtrsim_1,\cdots,\gtrsim_I$）$\epsilon A$と（$\gtrsim_1{}',\cdots,\gtrsim_I{}'$）$\epsilon A$に対して、$x F$（$\gtrsim_1,\cdots,\gtrsim_I$）$y \Leftrightarrow x F$（$\gtrsim_1{}',\cdots,\gtrsim_I{}'$）$y$であるから、$F: A \to \wp$はペアワイズ独立性条件を満たす。$y = f$（$\gtrsim_1,\cdots,\gtrsim_I$）であると仮定する場合も同様に証明できる。

ステップ7

社会的選択関数$f: A \to X$は独裁的である。

アローの不可能性定理より、すべてのプロファイル（$\gtrsim_1,\cdots,\gtrsim_I$）$\epsilon A$に対して、$x \succ_h y$であるときはいつでも$x F_p$（$\gtrsim_1,\cdots,\gtrsim_I$）$y$であるようなエージェント$h \ \epsilon \ I$が存在する。故に、ステップ4により$X$に関する$F$（$\gtrsim_1,\cdots,\gtrsim_I$）に対して最も選好される選択肢であると言える$f$（$\gtrsim_1,\cdots,\gtrsim_I$）がまた$h$にとって最も選好される選択肢でなければならない。すなわち、すべての$x \ \epsilon \ X$に対してf（$\gtrsim_1,\cdots,\gtrsim_I$）$\gtrsim_h x$である。故に、エージェント$h$は独裁的である。

4

３節の命題の系を導く。

系

選択肢の数が少なくとも３つあり、認められうる選好プロファイルの領域が$A = \mathscr{R}^I$か$A = \wp^I$であると仮定する。情報の非対称性が存在する２つの社会において、それぞれに弱いパレーティアンで単調な異なる社会的選択関数$f: A \to X$が選択されているとする。それら２つの社会構成員が協力し新たな１つの組織として、もとの組織内において選択されていたどちらか一方の弱いパレーティアンで単調な社会的選択関数$f: A \to X$を選択しなければならないとする。このとき、新たな１つの組織においてある１人の独裁的な者が存在してしまう。

また、もとの組織内において選択されていた弱いパレーティアンで単調な社会的選択関数$f: A \to X$によって、新たな組織の状況がパレート効率

的であるとは言えず、任意の個人の効用は時間の経過に伴い上昇しうるが、ただちに上昇するとは限らない。

証明

３節の命題より、情報の非対称性が存在する２つの社会において選択されている、弱いパレーティアンで単調な社会選択関数 $f: A \rightarrow X$ はいずれも独裁的である。また、３節の命題より、それら２つの社会構成員が協力し新たな１つの組織において選択される、もとの組織内において選択されていたどちらか一方の弱いパレーティアンで単調な社会的選択関数 $f: A \rightarrow X$ も独裁的である。

また、もとの組織内において選択されていた弱いパレーティアンで単調な社会的選択関数 $f: A \rightarrow X$ によって、それぞれの組織の状況がパレート効率的であるとは限らない。さらに、それら２つの社会的選択関数 $f: A \rightarrow X$ は、情報の非対称性が存在する２つの社会において選択されている社会的選択関数 $f: A \rightarrow X$ であるから一致するとは限らない。したがって、新たな１つの組織において選択される弱いパレーティアンで単調な社会的選択関数 $f: A \rightarrow X$ は、もとの組織内において選択されていた社会的選択関数 $f: A \rightarrow X$ と一致するとは限らない。

＜参考文献＞

Andreu Mas-colell Michael D. Whinston and Jerry R. Green（1995）, *Microeconomic Theory,* Oxford University Press. Chap. 21.

Arrow, K. J.（1963）, *Social Choice and Individual Values,* 2d ed. New York: Wiley.

Moulin, H.（1988）, *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Sen, A.（1970）, *Individual Choice and Social Welfare*. San Francisco: Holden Day.

Sen, A.（1986）, Social choice theory. Chap. 22 in *Handbook of Mathematical Economics,* edited by K. Arrow, and M. Intriligator. Amsterdam: North-Holland.