Ｅｘｃｅｌを使って確率・統計
— モンテカルロ・シミュレーション —

奈良文化女子短期大学　環境教養学科　　松　田　親　典

現在社会において、いろいろな場面でＯＲ(Operations　Research)が活用されるようになってきた。ＯＲの重要な手法としてシミュレーションがよく使われる。コンピュータの進歩にともなって、ＯＲの技法も大いに発展してきた。このシミュレーションのもとになったのがモンテカルロ法である。今回、学生とともにＥｘｃｅｌを使ってモンテカルロ法でπの近似値を求めたので、その報告をする。

はじめに

統計学の授業でコンピュータを使って処理する方法も指導している。Ｅｘｃｅｌを使って、平均、分散、標準偏差を求めることは、関数を使えば容易なことである。しかしながら値を求めるのは簡単に求められるが、その値の意味についてはほとんど理解できず、推定や検定の指導につながっていかない。そこで、理論の指導をし、電卓による手計算をさせ、理論の定着を図っている。理論が理解できた段階で、Ｅｘｃｅｌを使って簡単にもとめる方法を指導している。また、コンピュータを使ってこそ値打ちがあったということを感じ取らせるには、シミュレーションの指導をすることによってわからせることができると思っている。モンテカルロ法はシミュレーションのもとになった考え方で、応用範囲の広いものである。これからの社会では、どんな職種についても、いろいろなケースでシミュレーションをもとにしたＯＲが必要とされる時がくると思われる。その時、モンテカルロ法を理解していれば、どんなシミュレーションの方法でも基礎的な原理は理解できるようになると考えている。モンテカルロ法はランダムウォークや定積分による面積の計算など数多く利用されてきたが、学生に結果がすぐわかるものとして、πの値の近似値が3.14であることを学生とともに確かめることにした。

コンピュータの進歩

コンピュータは、もともとパンチカードによる織機の制御から始まったが、第二次世界大戦において戦争シミュレーションを実施するようになり、電子化され急速な発展を遂げた。現在のコンピュータは小型、軽量化され、進化してきた。また、ソフトの開発が拍車をかけ、日常生活の中に浸透してきた。ワープロ、表計算、データベース、プレゼンテーションなどには、特に有効なソフトが市販されているし、メールやインターネットは日常生活に溶け込んでいる。また、簿記帳簿、病院のカルテや映画の特殊撮影など特別な処理をするソフトも開発されている。更に、宇宙開発にはなくてはならない存在であり、あらゆる場面を想定したシミュレーションがなされ、飛行中に起こる予期せぬ事態にも速やかに対

応がなされている。

ここでコンピュータの歴史を年代別にまとめてみる。

1940年代 ・ パンチカードシステムからコンピュータへ
・ 真空管を利用し、電子の流れを利用した汎用電子計算機完成

1950年代 ・ 磁気テープをメモリーとして使用
・ ＣＰＵの回路素子として真空管からトランジスターへ

1960年代 ・ 多くの回路素子が１個の基盤に結合された電子回路ＩＣが開発される
・ ＩＣ（集積回路）を使いコンピュータの小型化が進む

1970年代 ・ フロッピーディスクをメモリーとして使用
・ 複数のコンピュータを使い、システム・ネットワーク体系として使用
・ ＬＳＩ（大規模集積回路）を使い小型化が進む
・ 漢字情報システムが開発される

1980年代 ・ 初心者用に卓上型コンピュータが開発される
・ 日本語による処理が可能となる
・ パーソナルコンピュータ発売
・ 磁気ディスク制御装置を使った大型汎用コンピュータ完成

1990年代 ・ 小型化が更に進み、ノート型パソコン発売
・ インターネット接続サービス開始
・ 通産省エレクトロニクス・コマース（電子商取引）を許可
・ 音声認識ソフトウェアーが開発される

2000年代 ・ 次世代e-ビジネス用ＩＴインフラ・ビジネス・モデル発売
・ 未来へ向かって更に発展

オペレーションズリサーチ（ＯＲ）

企業において、新事業を計画したり、現在実行している事業を改善しようとする場合、数多くの計画の中から１つに絞り込んだり、その計画が円滑に実行できるかどうかの判断に迫られる。昔は事業家の勘や経験からの判断にゆだねられていた。近代化が進むにつれ、このような問題を科学的に判断する方法としてＯＲが発達してきた。企業を例にしたが、歴史をたどると、ＯＲは戦争のたびに急速に進歩を遂げていることがわかる。現在では、あらゆる社会現象に対応すべくＯＲの手法も開発されている。シミュレーションもその１つの技法である。

自然科学においては、現象を数値化しやすい面があり、多変量解析や数量化理論などを駆使し適切な解を得ることも可能である。また、解が見つからない場合でも、シュミレーションすることによって、模擬実験し、近似解を見つけ出すことが容易である。したがって、ＯＲも自然科学の面で進歩し、社会科学の面では遅れをとってきた。確かに人の気持ち、精神状況、喜び、悲しみなど数値化しにくい面があり、近年ようやく、分析する方法も開発され、社会科学にもＯＲが使われるようになってきた。

家庭電化製品はそのほとんどが電気工学の分野、時計などは精密機械工学、日用品など化学製品は化

学工学というように、各分野に縦に分類されるが、ORはそれらの分野を横につなぐような性格を持っており、分野を問わない考え方である。

シミュレーション

最近のニュースでは、大きな災害として地震や津波が世界的な問題になっている。地震予告も研究されてはいるがまだまだ実用化されるにいたっていない。今のところコンピュータによる避難経路のシミュレーションを行い、避難経路の確認と避難訓練が行われている程度が現状である。このようにシミュレーションは私たちの身近な存在となってきたが、今後、更に発展の余地を残している。

シミュレーションは主に自然科学の進歩に寄与してきたが、現在では社会科学にも応用され、さらに発展している。シミュレーションは、数式で表されないような問題でも、現象をまねた実験や現象によくにたモデルを作ることによって解の近似値を見つけ出すことができる。

例えば、戦争ゲームにおいては、陸・海・空軍の兵隊の人数、戦車・車両・大砲の数、艦船や飛行機の数の様な武器の数、草原・山や道路による進軍のスピード、敵・味方との距離などの条件を設定し、その戦力を数値化し、戦うゲームである。いざ戦いとなれば、戦力の差で勝敗を決めたり、戦力にあまり差のない場合は確率的な方法で勝敗を決するなど、戦いのルールにのっとって戦いを進めるものである。戦争ゲームは昔から各国の軍隊で、指揮官や幕僚の訓練や立案した作戦計画の有効性の検証に利用され工夫され、進歩してきた。現在では、テレビゲームが発達し、大人から子供まで楽しめる臨場感あふれるゲームが流行している。これらもシミュレーションの一種である。

モンテカルロ法

コンピュータの利点は物事を迅速に処理するだけでなく、シミュレーションに活用することこそ値打ちがある。コンピュータの歴史を紐解くとき、織物の機械を制御することから始まったが、第二次世界大戦において戦争のシミュレーションに活用されるようになり、大きく進歩を遂げた。シミュレーションは複雑な条件設定で簡単な数式計算では解が得られないものでも、解の近似値は得られる。モンテカルロ法はシミュレーションの基礎になる考え方であり、しっかり理解しておけば、複雑なシミュレーションの理解に役立たせることができる。

モンテカルロ法は数学的な要素が多く、「乱数を活用して、解を得る」ものであり、比較的理解しやすく、有効なシミュレーションの一種である。つまり、無作為な乱数を使って、条件に適するものを確率的に捕らえるものである。

ある図形の面積を求める場合を例にとると、モンテカルロ法の活用方法は次のようにまとめるられる。

(1) 図形が数式で表され、しかも定積分で面積が計算できる場合は、モンテカルロ法を使い、近似計算をし、計算ミスがないかどうかのチェックに活用する。

(2) 図形が数式で表されるが、定積分で面積が計算できない場合は、モンテカルロ法で求めた値を近似値として採用する。

(3) 図形が数式で表されないので、面積を計算で求めることができない場合は、モンテカルロ法で求め

た値を近似値として採用する。

以上のように、図形の面積を求めるだけでもそのケースに応じて活用方法も異なる。

実例として、モンテカルロ法でπの近似値を学生とともに求めたので、次に述べる。

Ｅｘｃｅｌを使ってシミュレーションしよう

問．πが3.14であることを乱数を使って確かめてみよう。

(1) Ａ１に乱数を設定する。数学／三角　で使う関数で乱数を発生させる。

「＝ＲＡＮＤ（）＊100」　→　オートフィル機能を使ってＡ100まで設定

(2) Ｂ１にＡ１を四捨五入して、小数第１位までの数にする。

「＝ＲＯＵＮＤ（Ａ１，1)」　→　オートフィル機能を使ってＢ100まで設定

(3) 乱数はすぐ変わるので、固定させる。

Ｂ列を範囲指定　→　コピー　→　Ｃ列に貼り付けるとき、値を貼り付ける。

(4) (3)を実行すると、すでにＡ列には異なる乱数が発生している。

Ｂ列を範囲指定　→　コピー　→　Ｄ列に貼り付けるとき、値を貼り付ける。

Ｃ列、Ｄ列に100個の異なる乱数が２列出来た。

(5) Ｅ１に「＝Ｃ１＊Ｃ１＋Ｄ１＊Ｄ１」と入力

→　オートフィル機能を使ってＥ100まで設定

(6) Ｅ列の中で10000以下の数が何個あるか調べる。

Ｆ１に論理関数ＩＦを使う。

「＝ＩＦ（Ｅ１＜＝10000，Ｅ１,"")」となる。

もし、Ｅ１が10000以下ならば、Ｅ１の値を、そうでなければ空白を返す。

→　オートフィルでＦ100まで設定

(7) Ｆ１０１に「＝ＣＯＵＮＴ（Ｆ１：Ｆ100)」を入力

(8) (7)の結果を報告用紙に記入し、同様のことを50回繰り返す。

以上で１人5000個のデータができるので、合計、平均、πの値を計算して報告書を提出しなさい。

πの計算方法は

Ｆ101が10000以下の個数、これをＺとすると、π＝Ｚ＊４／100で求まる。

理由は口頭で説明するが三平方の定理を知っていれば十分理解できる。

(6)、(7)の別の方法

Ｅ列を範囲指定

データ　→　フィルタ　→　オートフィルタ　→　オプション、10000，以下　と設定

10000以下のものが選択される。

Ｇ列の10000以下の部分の最初に「１」を入力する。

→　オートフィル機能を使って選択された部分に連番指定すれば、

10000以下の個数がすぐわかる。

πの近似値

前ページは学生に配布した資料であり、次ページは学生からの報告書である。

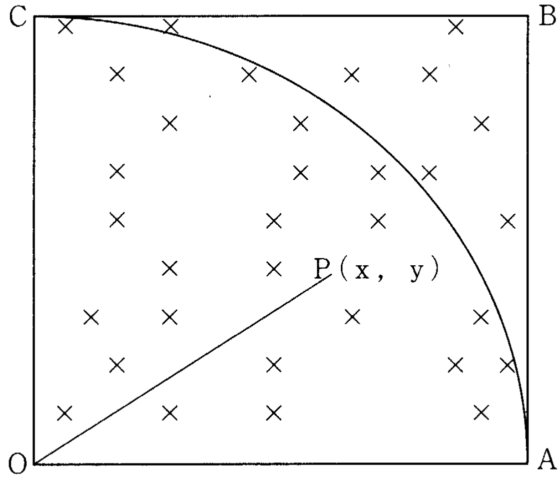
πの近似値をモンテカルロ法でもとめる方法を説明すると、

右の［図１］は、１辺が100の正方形ＯＡＢＣの中に、半径100の１／４円ＯＡＣがある。

０～100の乱数を２回発生させて、その２数をｘ，ｙ座標とする点Ｐ（ｘ，ｙ）を、正方形ＯＡＢＣの中にプロットする。いま100個の点をプロットしたとき、何個の点が１／４円ＯＡＣの中に入るかを数える。Ｚ個入ったとすると、Ｚ：100が１／４円の面積：正方形ＯＡＢＣの面積と考えられる。したがって、

$$Z : 100 = 1/4 \times \pi \times 100^2 : 100^2$$

$$= \pi : 4$$



［図１］

ゆえに、$\pi = Z \times 4 / 100$　でπの近似値が得られる。

実験回数が多い程、より近い近似値が得られるので、同様の試行を１人50回繰り返した。

次に、Ｅｘｃｅｌで求める実際の方法（前ページの内容）を説明する。

(1)　は、乱数の発生方法であるが、関数ＲＡＮＤを使うと０～１までの乱数を発生させるので100倍し、Ａ列に０～100の乱数を作った。

(2)　は、説明しやすいように、小数第１位までの数になるよう四捨五入し、Ｂ列に記録した。

(3)　は、Ａ列で発生する乱数はすぐ変わるので、Ｃ列に固定した値をｘ座標となるよう貼り付ける。

(4)　も(3)と同様の作業をするが、Ａ列の乱数は変わっているのでＤ列にｙ座標が得られる。

(5)　は、三平方の定理より、$x^2 + y^2$の値を計算する。

(6)　は、集合$P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 100^2\}$　の要素の数$n(P) = Z$を求める。

つまり、点Ｐ(ｘ，ｙ)が１／４円の内部および周上にある数Ｚを求める方法なのでいろいろな手法があるが、学生とは論理関数ＩＦを使って、Ｆ列に条件を満たす場合はその値を、満たさない場合は空白を戻すことにした。

以上の(1), (2), (5), (6)のＡ１，Ｂ１，Ｅ１，Ｆ１の計算式を100行分オートフィル機能を使ってコピーをすると、各列自動的にそのセルにあった計算式に変更される。

(7)　は、Ｆ１～Ｆ100をカウントすれば、その値がＺである。

(8)　は、Ｚの値を次ページにあるような結果報告書に記入する。すでにＡ１～Ａ100の乱数は新しい乱数を発生させている。Ｃ列、Ｄ列を消去して繰り返す。

πの値をシミュレートしたときの報告書

（　Ｂ　）組　氏名（　Ａ子さん　　　　　　　）

次の箱の中に１００個ずつ処理した結果を書き入れなさい

８１	７４	７７	７５	６８
８６	８１	８１	７２	８８
８４	７９	８２	８２	８２
８１	８１	８４	８３	７８
７７	８０	７６	８３	８１
６７	８２	７１	８３	８２
７１	７６	７３	７２	７９
７９	８１	７７	８０	７４
７７	８５	７７	７７	７７
７９	８０	７８	７６	７６

合計＝３９２５　　　平均＝７８.５　　　π＝３.１４

学生３４名分の報告データ（πの近似値）

３.１３０４	３.１２８８	３.１６３	３.１２	３.１６０８
３.１１２８	３.１３６	３.１８３２	３.２１９２	３.２１４４
３.１５３６	３.１３８４	３.１４８８	３.１１４４	３.１３２
３.１５５２	３.１２５６	３.１７７６	３.０９０４	３.１７６８
３.１７７６	３.１４８	３.１２４	３.１５０４	３.０８６４
２.９８８	３.１１９２	３.１５６	３.１３６８	３.１４
３.１３２	３.１３９２	３.１３３６	３.１４４	

結果の検討

今回の実験のデータは、１人あたり5000回の結果であり、前ページのとおりである。学生34名から提出された平均についてのデータを処理した。Ｅｘｃｅｌの関数、ＡＶＥＲＡＧＥ(標本平均)、ＶＡＲＰ(標本分散)、ＳＴＤＥＶＰ(標準偏差)を使かえば簡単に処理できる。

(1) データ数　３４
(2) 標本平均　３.１３９９０５８８２
(3) 標本分散　０.００１５０９０７３
(4) 標準偏差　０.０３８８４６７９５

このデータから母集団の平均値を95％の信頼度で推定してみることにする。母分散が既知の場合は正規分布を利用して母平均の区間推定を行うが、今回のように実験を行うような場合は母分散は未知の場合が多い、このときはｔ分布を使い母平均の区間推定を行うのが通常である。

標本数ｎ，標本平均を$\overline{\chi}$，標本分散をｓ^{2}とすると、母平均の95％信頼区間は

$$\left[\ \overline{\chi}-2.042\times\frac{s}{\sqrt{n-1}}\ ,\ \overline{\chi}+2.042\times\frac{s}{\sqrt{n-1}}\ \right]$$

で求めることができる。

$$\left[\ 3.140-2.042\times\frac{0.03885}{\sqrt{33}}\ ,\quad 3.140+2.042\times\frac{0.03885}{\sqrt{33}}\ \right]$$

したがって、母平均の信頼区間は［3.1262　,　3.1538］

つまり、「πは、3.126と3.154の間にある。」と結論しても、95％は確かであることを示している。

今回の試行は、34名が一人5,000回行ったものであり、個々の学生にとっては、2.988～3.2192の間の値をとり、3.14とは少々離れた結果が出た学生もいるが、全員の標本平均を取ると、小数第３位を四捨五入すれば、3.14となった。つまり、試行回数を多くすればより良い近似値が得られることも学生は理解することができた。今回は、コンピュータによる乱数を使い、モデルも単純なものを扱ったので、目的が達成できたように思う。モンテカルロ法では特に、乱数のランダム性と正確なモデル化、さらに試行回数が重要なポイントである。

乱数の作成は従来から工夫されており、簡単なものは、乱数サイや乱数表を利用するが、平方採中法(８桁の数を平方して中央の８桁を取り、また、その数を平方して中央の８桁の数を取るという方法)や乗積合同法で乱数を作る方法もあるが、現在では、コンピュータのプログラムにゆだねるケースが多い。しかし、乱数はランダムであることが身上であり、今後も改良されていくであろう。

また、社会科学の面で、社会現象のように複雑な要素や人の気持ちなどのように分析しにくい要素をより良いモデルで表現でき、模擬実験できる方法の研究が待たれる。

終わりに

今回、学生とともにモンテカルロ法でπの近似値を求めた。平均が3.14と出てきた学生は大喜びしていたし、残りの学生も全員ほぼ近い値が出てきたので、何かπに親近感を持った様子であった。

学生の感想をいくつか紹介すると

* 難しかったけど、面白かった。
* 普段のパソコンの授業とはまたぜんぜん違ったＥｘｃｅｌの内容なので、やって新鮮味があった。
* パソコンは慣れていないので、使うのに戸惑いましたが、理解できたらなんでも求められそうで、面白そうだと思いました。
* 貼り付けを間違ったりして、乱数がどんどん変わってしまったので、大変だった。けど楽しかった。
* 同じ動作をしながら操作をするのに、はじめは大変でしたが、だんだん慣れてきて理解できるようになりました。円周率3.14に今まで疑問を持ったことがなく、そのまま、円周率は3.14だと教えられていたのですが、疑問を持つことは大事なことだと感じました。

学生にいろいろなシミュレーションを紹介する時間もなかったが、学生はＥｘｃｅｌを表作成・グラフ作成など決まった使い方以外のことにも活用する方法があることを理解したように思う。また、モンテカルロ法を使って、面積を求めることや待ち時間の期待値を求めることなどは出来そうだと感じたようである。今後も、コンピュータを決まった処理に使うだけでなく、それ以外の使い方について教材化し、学生に興味・関心を持たせる取り組みを進めていきたい。

引用参考文献

馬場　裕　著　「初歩からの統計学」　牧野書店　2001

関根　智明、高橋　磐郎、若山　邦紘　共著　「シミュレーション」　日科技連出版社　1997

大村　平　著　「シミュレーションのはなし」　日科技連出版社　1991

インターネット

http://www-6.ibm.com/jp/event/museum/rekisi/visual.html

http://www.orsj.or.jp/whatisＯＲ/whatisＯＲ.htm

http://web1.nazuka.co.jp/hp/no1casino/monte/