大学入学時における数学のリメディアル指導について

— 数学を主としない分野に進む学生のためのリメディアル微分・積分 —

堀　内　秀　紀

奈良学園登美ヶ丘高等学校

On remedial guidance of mathematics for fresh students of university

- Differential and integral calculus for students of humanistic fields -

Hideki Horiuchi

Naragakuen Tomigaoka Highscool

大学入学時における数学の学力低下に対するリメディアル教育が必要であるか否かを議論する段階ではなく、どのような内容を、どのような対象に行うべきか考える段階である。

本稿では、数学を主とする分野に進まない、すなわち高校段階において数学Ⅱの履修をもって微分・積分の学習を終える学生たちが、積分を単純な計算演習にとどまることなく、リーマンの意味での積分可能を直感的にイメージしつつ定積分を用いることができることを目指し、歴史的な流れにできるだけ忠実な指導過程を提示する。

【はじめに】

現行の高等学校学習指導要領では、微分・積分は数学Ⅱにおいて初めて扱われる。その扱われ方は次のような流れが一般的である。

① 平均変化率$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$から微分係数$f'(a)=\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$、すなわち平均から瞬間の変化率を導入し、接線の傾きを表す。

② 微分係数を値に持つ導関数$f'(x)$を導入し、導関数の求め方すなわち微分法を導入する。

③ 接点の周辺では接線は曲線と同一視できること、すなわち接線が接点周辺での曲線の一次近似であることを確認する。

④ 接線が接点周辺での曲線の一次近似であることを基に、導関数の正負すなわち接線の傾きの正負によって関数の増減を判定する。

⑤ 関数をその値の増減でもって特徴付け、増減の変わり目として極大・極小を定義する。

⑥ 関数の値の増減の変化という視点より関数のグラフを描く。

⑦ 関数のグラフの利用すなわち関数の値の増減の応用例として、関数の最大・最小、方程式・不等式

への応用を扱う。

⑧　微分の逆の概念として不定積分を導入する。

⑨　関数$f(x)$の不定積分の一つを$\mathrm{F}(x)$とするとき、定積分$\int_a^b f(x)dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$を定義する。

⑩　$f(x)\geqq 0$の場合、曲線$y=f(x)$と直線$x=a, x=t(a\leqq t)$,x軸で囲まれた部分の面積を表す関数$\mathrm{S}(t)$が関数$f(t)$の不定積分であることを示す。

⑪　関数$f(x)$の不定積分の一つを$\mathrm{F}(x)$とするとき、$\mathrm{S}(t)=\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(a)$　となることを示す。

⑫　定積分を利用して曲線とx軸 あるいは2つの曲線で囲まれた部分の面積を求める。

一見問題なく流れているように思われる。しかし、現実にはこうした流れで学んだ学生の微分・積分に対する理解は、本来あるべき姿とはかなり隔離したものになっている。高等学校で扱う数学の中で微分・積分は最も体系のできあがった内容である。従ってこの素材からは、より実りの多い展開があるように思われる。上記の展開で特に注意したいのは⑨～⑫の段階である。

すなわち

①　定積分$\int_a^b f(x)dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$の定義を行う。

②　直後に、関数$f(x)$ただし$f(x)\geqq 0$という条件において、不定積分の例として関数$f(x)$のグラフとx軸とで囲まれた部分の面積を表す関数$\mathrm{S}(t)$が登場。

③　$\mathrm{S}'(t)=f(t)$を示し、$\mathrm{S}(t)=\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(a)$を導き。

④　①を利用して曲線で囲まれた部分の面積を具体的に求める。

と流れていく点である。

この流れの中では、学生自身が定積分の概念を前出の⑩⑪と同一視する状況を生み出している。すなわち定積分で面積を求める際$f(x)\geqq 0$という条件が必要ではあるが、なぜ必要なのかについては理解しにくい状況になっている。本来この部分で、定積分の本来の定義と面積関数との差違を理解する場面であるはずであるが、現実には$f(x)\geqq 0$を確認し$\int_a^b f(x)dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$を計算し面積を求めるといった認識にとどまっている。定積分という概念が非常に直感的なイメージを持つことが可能であるにもかかわらず、大半の学生にとって直感的な理解を伴うことなく、ひたすら微分の逆演算（前出⑪の作業）および数値計算（前出⑫）に終始していると言っても過言ではない。

【積分の導入における留意点】

定積分の歴史的な流れを振り返ると

①　曲線で囲まれた部分の面積を長方形等の有限個の図形の面積和の極限として表現したのは、アストテレスにさかのぼる。

②　１７世紀にニュートン、ライプニッツによって微分が導入される。

③　１９世紀にリーマンによって定積分が導入される。

リーマンによる定義は、次のようなものである。

$f(x)$ は区間$[a,b]$ で与えられた有界な関数とする。区間$[a,b]$ を分点$x_1,x_2,\cdots\cdots x_{n-1}(x_0=a,x_n=b)$ によって細分しその分割Δ とする。各小区間内に$\gamma_k(x_{k-1}\leqq\gamma_k\leqq x_k)$ を任意にとり

和$\mathrm{S}(\Delta)=\sum_{k=1}^{n}f(\gamma_k)(x_k-x_{k-1})$ を考える。分割Δ における細区間の最大幅をδ とするとき、$\delta\to\mathbf{0}$

の時$\mathrm{S}(\Delta)=\sum f(\gamma_k)(x_k-x_{k-1})$ がある一定の値に近づくとき、$f(x)$ はリーマン積分可能であるといい、$\lim_{\delta\to 0}\sum f(\gamma_k)(x_k-x_{k-1})=\int_a^b f(x)dx$ で表す。

④　微分積分の基本定理によって、定積分$\int_a^t f(x)dx$ と関数$f(x)$ が微分をとおして接点を持ち、関数 $f(x)$ の原始関数$\mathrm{F}(x)$ を用いて定積分$\int_a^t f(x)dx=\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(a)$ の計算法が確立。

といったものである。

このように非常に長い時間を経て、定積分$\int_a^b f(x)dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ に至ったのある。

微分・積分を扱う際に、このような歴史的な流れは重視するべきであり、このような流れのなかで微分・積分を理解することが重要であり、また理解への助けとなるものである。

特に次の４点は展開する上で不可欠な留意点である。

①　曲線で囲まれた図形の面積を、直線図形の有限個の面積和の極限として捉える

②　①を背景にしつつ、リーマンによる定積分の定義を導入。

③　微積分の基本定理によって$\int_a^t f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{t-a}{n}f(x_k)$　(x_k は$x_0=a,x_n=t$ を満たす区間$[a,t]$ のｎ等分点）について、微分可能で$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx=f(t)$ が成り立つ、すなわち $\lim_{\delta\to 0}\sum f(\gamma_k)(x_k-x_{k-1})=\int_a^t f(x)dx$ で定義された定積分$\int_a^t f(x)dx$ が被積分関数$f(x)$ の原始関数であることが、微分という概念の導入によって初めて関連づけられ、$\int_a^t f(x)dx=\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(a)$ を得る。

④　関数$f(x)$ のグラフとx軸,直線$x=a,x=b$ で囲まれた部分の面積は、$f(x)\geqq 0$ という条件下では、$\lim_{\delta\to 0}\sum f(\gamma_k)(x_k-x_{k-1})=\int_a^b f(x)dx$ において関数$f(x)$ の値が長方形の高さを表すとの理解の基に $\int_a^b f(x)dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ で求めることができる。

当然高等数学Ⅱの範囲を前提に扱う以上、扱い方に制約があるのは致し方ない。細部の扱いにおいて、厳密さの犠牲も起こりえるであろう。しかし、このように定積分と微分という２つの概念が織りなす流れを理解することは、数学的な厳密さの犠牲以上もたらすものが大きいであろう。

【微分・積分の展開例】

1.　微分の展開例と留意点

数学Ⅱを前提として扱うなかで、具体的にどのような展開によって扱うべきか、それぞれの段階における具体的な教材を提示することにする。むやみに現行の流れを変えることはせず、可能な限り現行の扱い方に沿うことを基本とする。したがって、ここでは変更すべき部分のみを述べるにとどめる。

① 平均変化率から微分係数、すなわち平均から瞬間の変化率を導入し、接線の傾きへともっていく。
② 微分係数を値に持つ導関数を導入し、導関数の求め方すなわち微分法を導入する。
③ 接点の周辺では接線は曲線と同一視できること、すなわち接線が接点周辺での曲線の一次近似であることを確認。
④ 接線が接点周辺での曲線の一次近似であることを基に、導関数の正負すなわち接線の傾きの正負によって曲線の変化の状態を判定できることを確認。
⑤ 関数の特徴をその値の増減でもって特徴付け、増減の変わり目として極大・極小を定義する。
⑥ 関数のとる値の増減の変化という視点より関数のグラフを描く。
⑦ 関数のグラフの利用例として、関数の最大・最小、方程式・不等式への応用を扱う

以上の①から⑦については、特に現行の教科書等で扱われている典型的な流れであり、この流れに沿って進めていくことに異論はない。ただ、次の２点は留意しておきたい。

(1) ①、②の段階で$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$によって導関数を導入している段階で、関数$f(x)$の連続性を扱うことで、微分可能と連続の２つの概念を対比しておきたい。本来数学Ⅲで扱われていることであるが、この段階で扱うことで学生にとって大きく負担になるとは思えない。

　具体的には

・右側極限、左側極限の定義

・$\lim_{h\to +0} f(a+h)=\lim_{h\to -0} f(a+h)=f(a)$ によって、関数$f(x)$の$x=a$ の連続性を定義する。

ということになる。

これより、微分可能性の定義についても、

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を $\lim_{h\to +0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ の形で定義し、$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ と表現することになる。

関数$f(x)=|x|$ の $x=0$ における微分可能を実際に確認することで、関数の連続性と微分可能性の差違を明確にしておくことは有用である。

　右側極限、左側極限は数学Ⅲで扱っているが、理解すること自体難しいことではない。

　概念の意味については、その概念を導入する段階で、できるだけ早い時期に「なぜそのような概念が必要であるのか」あるいは「概念の背景」について学生自身が考える機会を設定することは、とりわけ今後数学に触れる機会の少ない学生が対象であるときは特に重要である。今後数学に触れる機会の少ない学生に対して、このような意味を考えさせることは、理解への困難を増すばかりであるとの考え方もあるが、今後数学に触れる機会の少ない学生に対してこそ導入する概念の意味を考えることは不可欠である。なぜなら、今後数学に触れる機会のある学生については、様々な数学的な体験によって、概念の意味を理解するあるいは誤って理解した概念についてその理解を修正す

る機会を期待できるが、今後数学に触れる機会の少ない学生に対しては、このような概念を理解する機会を持つことさえ多くは期待できないからである。

(2)　③の接線の位置づけである。現行の教科書ではひたすら具体的に接線の方程式を求めさせているようである。接線の方程式を求めることに異論はないが、なぜ接線を扱っているのか、その理由は③による。「関数が微分可能である」とは、このことであることを学生が視覚的に理解するように徹底するべきである。この理解なくしての微分の学習は空疎なものになる。しかし、現状では学生の大半が③を背景に接線を考えているものは少数のようである。ひたすら要求されるままに接線の方程式の求め方を身につけようとしているのが現状である。

たとえば次のような情景が多く見受けられる。

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,f(a))$ における接線方程式は $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ で与えられることを青の網掛けを入れるなどによって非常に強調された形で教科書に載せられている。

こうした状況で学生たちは対応は次のⅰ～ⅲのようなものである。

ⅰ. まずまるでコピーをするかのごとくとにかく形式的に公式を暗記する。

ⅱ. $y=f(x)$ の導関数を求め、 $f'(a)$ の値を求める。

ⅲ. 暗記している公式の $f(a),f'(a),a$ に数値を代入し方程式を求める。

要するに方程式を求めること、すなわち理解を伴わずに流れ作業的に公式に数値を代入することのみが目的となっているのである。本来 $f'(a)$ とするべきところに $f'(x)$ とする誤答例などはよく見受けられるものであるが、このような作業の結果生まれる典型的なものである。「導関数は接線の傾きを表す」の一文が学生たちを支配しているのであろう。なぜ接線に着目しているのか，その背景を実感できてこそ意味があるのだが。

２． 積分の展開例と留意点

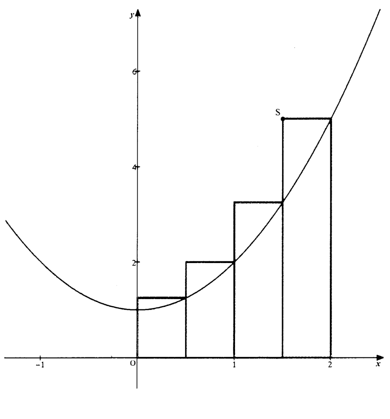
まず次のような流れで進めていくことになるが、それぞれの段階における展開例を示す。

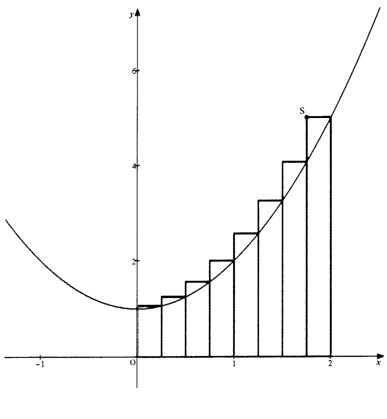
⑧　長方形の面積和の極限として曲線で囲まれた部分の面積を定義する。

⑨　区分求積法によって面積を求める。

⑩　区分求積法による面積の求め方の限界を示す。

まず、次のような図を提示する。



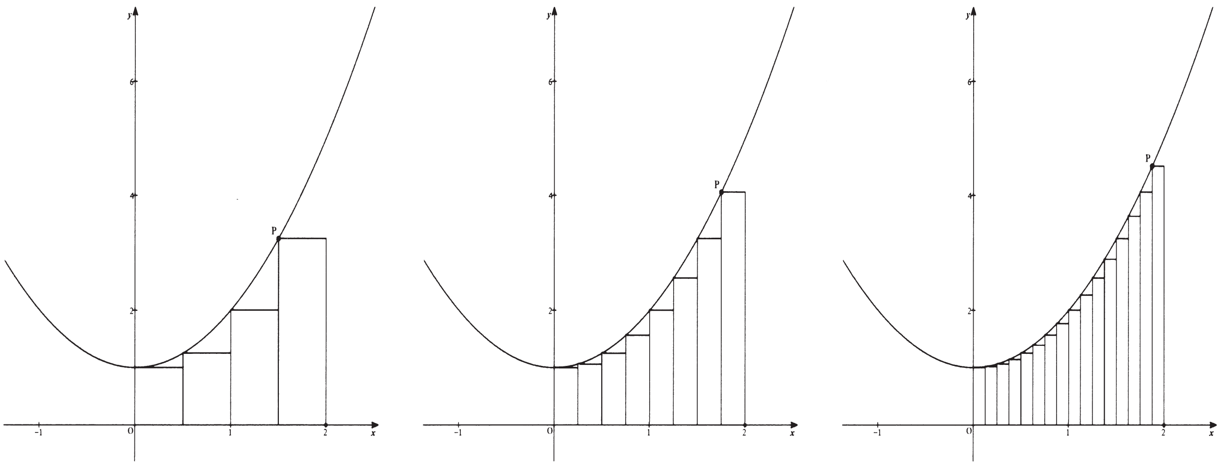


この段階での導入例は、細部はさておき概略は次のようなものが考えられる。
ここで、 曲線$y=x^2+1$と直線$x=0, x=2, x$軸 とで囲まれた部分の面積をＳとする。
提示した図では、当然ｎ等分点ではないが、x_k を$x_0=0, x_n=2$ を満たす区間$[0,2]$ のｎ等分点とするとき、図では４等分、８等分であるがこれらから推定することによって、図の長方形がｎ個となった場合、そのｎ個の長方形の面積和は$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(x_k)$ で表されることを理解することは容易であろう。学生の中には、ｎ等分を実際に思い浮かべようとするものもいるが、このような学生には例えば視覚的には８等分されている状態を思い浮かべながら８番目がｎ番目に変わるだけというように、この機会を使って具体的な例から一般的な場合を推測する術を説明するのもいいであろう。具体的な数から表現がｎに変わるだけで理解できなくなる学生が少なからず見受けられるので、学生達が様々な機会をとおして素朴な具体例から一般的な場合を”見る”術を経験する事は重要である。
ところで、

$x_k=\frac{2k}{n}$ より、 $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(x_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}+1\right)$、従って$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}+1\right)$

によって曲線で囲まれた部分の面積を表すことができるところまで持って行く。この段階で、$n\to\infty$ において$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(x_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}+1\right)$ の極限がＳとなることが視覚的に見えにくい学生への対応として様々なグラフソフトを利用することも有用である。

学生の中には、長方形の取り方がこれ以外にもあることに気づいているものも少なからずいるであろう。そこで念のため、長方形の取り方によらないことを示す意味で次の場合についても同様の処理をする。



今回の場合は、ｎ個の長方形の面積はそれぞれの長方形の高さに着目させることで$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{n}f(x_k)$ で表される。ところで、$x_k=\frac{2k}{n}$ より、 $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{n}f(x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}+1\right)$ 、従って今回は$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}+1\right)$ によって曲線で囲まれた部分の面積を表すことができることを確認する。

次の段階で、具体的に極限を求め、これらの極限が一致することを確認することは必要である。学生自身で求めることが困難である場合は、板書等を用いて指導者が学生を誘導しながら確かめていくことでもいいであろう。ここでの目標は、極限の具体的な計算練習ではなく $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}+1\right)=\mathrm{S}$ 、$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}+1\right)=\mathrm{S}$ が成り立つことを学生自身が実感することである。これらの極限を具体的に求める段階で、学生は $\lim_{n\to\infty}x_k$ のタイプの極限の求め方は知らない。

しかし、ここで数学Ⅲで扱われているように数列の極限、数列の和の極限を教科書的に扱ってしまうと、今必要な積分における理解への流れが冗長になる。極限の計算に学生の意識が流れることは、本来の理解への流れをよどませる一因になりかねないため、できる限りこの段階では流れをよどませる一因となる可能性のあるものは排除するべきである。従ってこの段階においての数列の極限についての扱いは、必要最小限にとどめることにする。右のような扱いでいいであろう。この部分が、学生自身で解決できれば最も望ましいが、それを期待できないときは、指導者と学生が板書等を用いて誘導しつつ確認していくといった方法でもよい。

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}+1\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{2}{n}\cdot n\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}+2\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{(2n+1)}{n}+2\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+2
\end{aligned}
$$

ここで、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ が成り立つことは直感的に受け入れられるであろう。

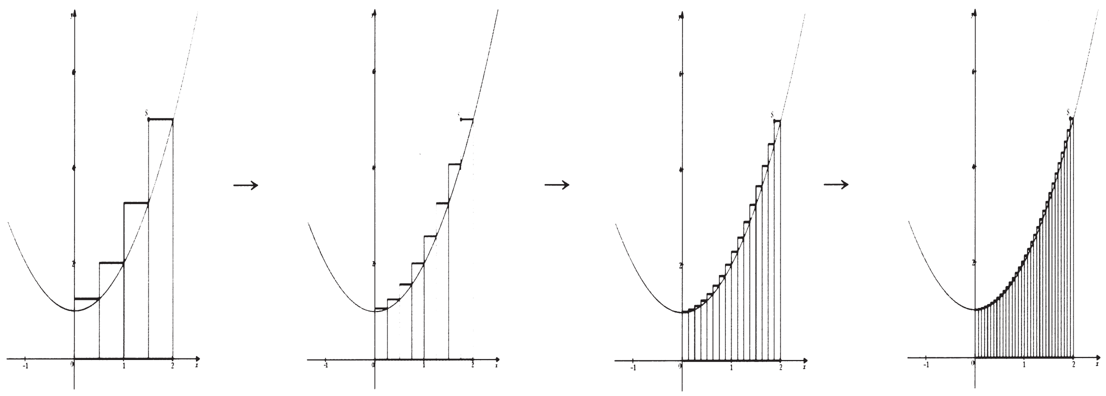
従って $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}+1\right)=\frac{14}{3}$ となることは容易に受け入れられるであろう。

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}+1\right)$ についても、実際に計算し、$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}+1\right)=\frac{14}{3}$ となることを学生とともに確認しておきたい。

ここでは、この極限を具体的に求める過程で次の2点は確認することが不可欠である。

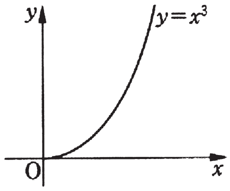
1) 曲線で囲まれた部分の面積が、直線図形すなわち長方形の面積の和の極限として求めることができることを直感的に理解している。

すなわち、$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(x_k)$ をみたとき、この式の中に、学生たちが



のようなイメージを持っている。また、こうした面積の求め方が、従来の慣れ親しんできた三角形の面積公式や長方形の面積の求め方と同一基準（この従来の面積の公式と同一基準）であること。

2)　扱った関数が $f(x)=x^2+1$ であったが、関数が $f(x)=x^3+1$ 、$f(x)=x^4+1$ となれば $f(x)=x^2+1$ の場合と比較し、どの部分が変わるのかに着目させ、曲線で囲まれた部分の面積を表すことができた反面、具体的に面積を求める道具としての計算の煩雑さ等道具としての限界がある。



この段階で次のような演習問題も有用であろう。

$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3$ とする。

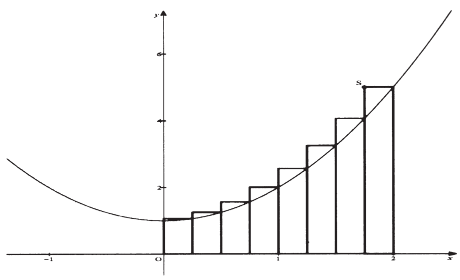
(1) S_n は曲線 $y=x^3$ に対し，どんな部分の面積を表すか図示せよ。

(2) S_n を n の式で表し，$\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

⑪　定積分の定義

長方形の面積和すなわち $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(x_k)$ のイメージが学生たちの頭に残っている段階で、残された背景を基にできるだけ早く定積分の定義を導入する。

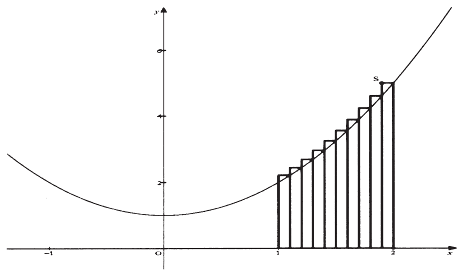
図 a



まず次のような図 a を提示することにする。

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}f(x_k)$ が一定値 α に近づくとき、この極限値 α を関数 $f(x)$ の 0 から a までの定積分といい $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}f(x_k)=\int_0^a f(x)dx$ と表す。（x_k は $x_0=0, x_n=a$ を満たす区間 $[0,a]$ の n 等分点）

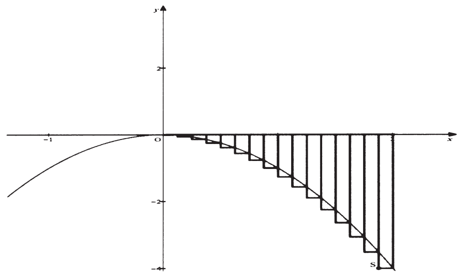
図 b



次に図 b を提示し

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_k)$ が一定値 α に近づくとき、この極限値 α を関数 $f(x)$ の a から b までの定積分といい $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_k)=\int_a^b f(x)dx$ と表す。（x_k は $x_0=a, x_n=b$ を満たす区間 $[a,b]$ の n 等分点）

図 c

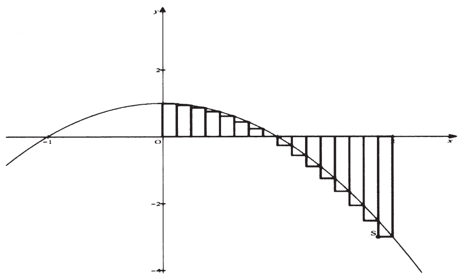


関数 $f(x)$ のグラフが右のようなとき

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}f(x_k)$ が一定値 α に近づくとき、この極限値 α を関数 $f(x)$ の 0 から a までの定積分といい $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}f(x_k)=\int_0^a f(x)dx$ と表す。

（x_k は $x_0=0, x_n=a$ を満たす区間 $[0,a]$ の n 等分点）

最後に関数$f(x)$のグラフが右のようなとき　　　　　　　　　図ｄ



$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}f(x_k)$が一定値$\alpha$に近づくとき、この極限値$\alpha$を関数$f(x)$の0から$a$までの定積分といい $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}f(x_k)=\int_0^a f(x)dx$ と表す。

（x_kは$x_0=0, x_n=a$を満たす区間$[0,a]$のｎ等分点）

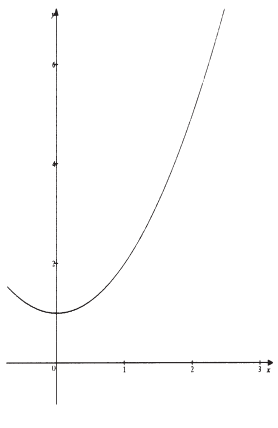
ここでは、いくつかの例を羅列的に提示することで、それぞれに定積分の持つ意味を学生自身に考えさせることを念頭に置いている。当然学生自身が求積法と定積分の「差」、すなわち「定積分は面積を求める極限の操作、求積法を一般化した概念である」ということに気づくことを期待しているわけであるが。

このように提示すると最初の図ａ、ｂの２つの場合の提示によって、学生たちは定積分の定義自体は面積を求める道具としてスムーズに受け入れるであろう。後半の図ｃ、ｄの２つの提示によって、定積分と面積との関係すなわち「定積分＝面積ではない」ことを押さえなくてはならない。この部分は指導者が天下り的に知識として伝えるのではなく、是非学生自身が「定積分＝面積ではない」ことを気づくべく、そういった状況を演出しなくてはならない。学生が「定積分＝面積ではない」ことを確認したの後、指導者は「定積分は面積を求める極限の操作、求積法を一般化した概念である」ことを明確にすればいいのである。この段階で抽象的な概念にはその生まれる元となるものがあることを学生たちに是非押さえたいところである。このように展開すると、この一例のみで到達できるものではないが、今後学生たちが抽象的な概念に接したとき、その概念の元となる姿を見ようとする姿勢を持ち、その概念の原型をイメージしつつ抽象的な概念を運用することを期待できる。

　さて、この段階では、定積分の定義に微分の概念は全く関係していないことを強調することは忘れてならない。

このままでは、学生たちにとって定積分の定義$\lim_{\delta\to 0}\sum f(\gamma_k)(x_k-x_{k-1})=\int_a^b f(x)dx$の有用さ、すなわち定積分の道具としての便利さを感じることができないであろう。できるだけ速やかに次の微分積分の基本定理へと向かわなくてはならない。

⑫　微分積分の基本定理による定積分と微分の接点



ここでは、学生に提示する証明例を示す。

ここではまず $f(x)\geqq 0$である単調な関数を提示する。

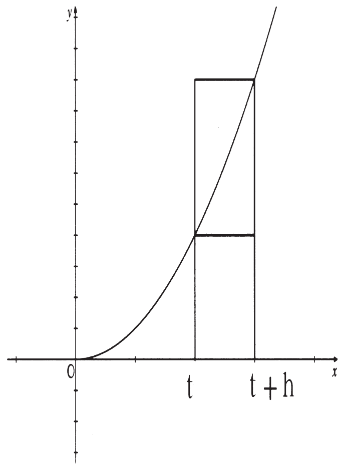
右の例は$f(x)=x^2+1$である。

導入段階の例として用いる関数はできるだけ象徴的で記憶に残りやすい単純な関数が望ましい。

学生にとっては定積分$\int_0^t f(x)dx$　は

曲線$y=f(x)$と直線$x=0, x=t(0\leqq t)$,x軸 とで囲まれた部分の面積を表しているという意識を継続させたままで進めていく。

定積分$\int_0^t f(x)dx$ は変数t の関数であるので、$\mathrm{F}(t)=\int_0^t f(x)dx$ とおく。このとき、$\mathrm{F}(t+h)=\int_0^{t+h} f(x)dx$ 。



$$\mathrm{F}(t+h)-\mathrm{F}(t)=\int_a^{t+h} f(x)dx-\int_a^t f(x)dx$$
$$=\int_t^{t+h} f(x)dx$$

$\frac{1}{h}(\mathrm{F}(t+h)-\mathrm{F}(t))=\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(x)dx$ ・・・・①

$f(x)$ は単調増加な連続関数であるので$f(t)\leqq f(x)\leqq f(t+h)$

右図のように、面積を比較することにより

$f(t)\cdot h\leqq \int_t^{t+h} f(x)dx\leqq f(t+h)\cdot h$ ・・・②

を得る。①、②より

$f(t)\leqq \frac{1}{h}(\mathrm{F}(t+h)-\mathrm{F}(t))\leqq f(t+h)$

ここで

$h\to 0$ とすると関数 $f(x)$ は連続な関数より$\lim_{h\to 0} f(t+h)=f(t)$

従って、$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\mathrm{F}(t+h)-\mathrm{F}(t))=f(t)$

すなわち$\mathrm{F}(t)=\int_0^t f(x)dx$ は微分可能な関数で、$\mathrm{F}'(t)=\left(\int_0^t f(x)dx\right)'=f(t)$ を得る。

この説明では単調増加な連続関数、しかも$f(x)\geqq 0$ という条件下で進めていることに、これでは数学の証明における「一般性」の部分が犠牲になり、この程度の説明ならかえって益よりも害の方が多いと思われるかもしれない。

しかし、この証明の流れにおいて、関数$f(x)$ について単調増加な連続関数、しかも$f(x)\geqq 0$ という条件を除いた場合、$f(t)\cdot h\leqq \int_t^{t+h} f(x)dx\leqq f(t+h)\cdot h$ において、閉区間［ｔ、ｔ+ｈ］における連続関数$f(x)$ の最大値を M_t 最小値を m_t とするとき、$m_t\cdot h\leqq \int_t^{t+h} f(x)dx\leqq \mathrm{M}_t\cdot h$ と変わっていくだけである。

この段階における説明においては、目的となる概念への理解の流れに可能な限りよどみをもたらさないことや学生がイメージしやすいこと、すなわち結果を感覚的に受け入れやすいことを最優先にするべきである。すなわち、関数$f(x)$ について単調増加な連続関数しかも$f(x)\geqq 0$ という条件のもとでの説明が学生にとって感覚的にどの程度受け入れやすい説明であるかといった観点こそ重視されなくてはならない。

また、たとえ限定的な条件での説明であっても、その条件下で為される説明の手法は一般的な条件下でも可能であり、学生にとって限定的な条件下における結論が、そのまま一般的な条件下に拡張できることを感じさせることが重要である。なぜなら、一般的な条件下で説明する場面でも、実はある限定的な条件下の状態あるいは単純な状態をイメージしつつ一般的な場合を運用していると言えるからであ

る。数学的でないと指摘を受けるかもしれないが、限定的で単純な例から一般的な結論をイメージできる事は、数学を主としない分野に進む学生にとって数式的な処理ができる以上に数学から身につけるべき術である。

また、歴史的にみても、

リーマンによって、単調関数がリーマン積分可能であることを（1854）、ハイネによって連続関数がリーマン積分可能であることが示された（1874）。

であることからも、最初の段階で単調関数について理解できればいいように思われる。

これ以後、積分については

⑬　定積分の不定積分による計算法。

⑭　曲線 $f(x)$ と x軸 あるいは２つの曲線で囲まれた部分の面積を定積分を用いて求める。

といった展開が待っているが、定積分を用いて面積を求める部分については、現在扱われている順序で

①　微分の逆演算による関数 $f(x)$ の原始関数を求める

②　定積分 $\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ の数値計算

③　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_k) = \int_a^b f(x)dx$ をイメージして、定積分で面積を求める

といった面について習熟する段階であることを念頭に進めていけばよいように思われる。

【まとめと課題】

数学Ⅱの範囲における積分の導入をモデルに、その概念の視覚的な理解を主眼に置いた内容の展開例を提示した。本稿では、流れを単純にするために面積に限定したが、同様に長さ、体積についても $\lim_{\delta\to 0}\sum f(\gamma_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x)dx$ で表すことができること、すなわち定積分とは $\lim_{\delta\to 0}\sum f(\gamma_k)(x_k - x_{k-1})$ で表される量を求める概念であることに言及するべきである。

学生には

・$\lim_{\delta\to 0}\sum f(\gamma_k)(x_k - x_{k-1})$ の視点より様々な量を捉えることができる

・量を求める具体的な技術として $\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

といった構図の理解を期待したいものである。

数学Ⅱの範囲で扱うことから、設定条件をかなり限定的にするなど数学の本来持ち味である一般性を犠牲にしている面がある。これについても、学生がいかに視覚的な理解に基づいて概念を運用しているかといったメリットと一般化の犠牲によるデメリットのいずれを選択するのかということに帰着する。

しかし、現時点で高等学校教科書で示されている流れの中で学習している学生の実態、特に数学Ⅱでもって微分・積分の学習を終える生徒（いわゆる文系学生）の実際の学習の実態を見るにおいて、その単純計算を中心とする学習方法から得られるものに多くは期待できない状況である。意味を十分理解し

ているとは言えない状態で、ただ求める手順を暗記し、答を確認しているだけの作業といっても過言ではない。要求された問題に対して正解に到達することと、正解に至る際に用いる概念を理解していることとは、同義ではない現実をここにみることができる。

このような学習状態となる原因については、ここでは深く触れないが、中学校入試から始まる現在の入試システムに付随する塾などの教育環境とは無関係でないように思われる。本来、このような一時的な教育環境は、”ゆとり”ある教育によって補完されるはずであるが、現状では”ゆとり”がどうもうまく機能していないようである。

現在の数学Ⅱにおける積分に関する指導方針は、概念の理解度を向上させる方向ではなく、単純に正解率を向上させる方向に向いているように感じられる。正解率が高くなることでその概念の理解が高まっていること、またその指導方針の適正さが示されるとの判断であろうが、現実には、正解は出しているがその過程において訳もわからず概念を使っている、すなわち正解を求める過程の手順のみを覚えているといった状況を生み出している。こうした状況は何も微分・積分特有の状況ではなく、高等学校数学のすべての項目についてあてはまるように思われる。

今後、学生たちの置かれている小学校以後の教育環境についても十分に検討を加えなくてはならないが、まずは、高等学校で扱われるすべての概念について、学生はその概念についてどのような理解のもとで運用するべきか等、大学入学時点における高等学校数学の理解についての基準となる到達度を設定することが必要である。この部分が現在最も曖昧になっているところであり、襟を正さなくてはならない部分である。

この基準となる到達度の設定と同時に、現在の学生の学習状況の実態を把握することによって、補完する指導方法や教材の開発が急務である。

参考文献

（１）高木貞治　解析概論
（２）青本和彦　微分・積分　1995
（３）志賀浩二　微分・積分３０項　1988
（４）小笠原正明　「リメディアル教育の動向」1996

〒631-8523　奈良市中登美ヶ丘３-15-１　☎0742-93-5431　奈良学園登美ヶ丘高等学校