数学のリメディアル指導について
— 1次変換の視覚的理解について —

堀　内　秀　紀

奈良学園登美ヶ丘高等学校

On the Remedial Guidance of the Mathematics
- Visual understanding on linear transformation expressed 2by2 matrix -

Hideki Horiuchi

Naragakuen Tomigaoka Highschool

高等学校段階で数学Ｃの履修した学生たちが，数学Ｃで扱われる１次変換すなわち２×２行列で表される１次変換を単純な計算処理にとどまるのではなく，１ 次変換について視覚的な理解を持ってその概念を運用できること，大学初年級での線形代数へできるだけスムーズに移行できることに重点をおいた展開例を提示する。

キーワード：1 次変換　基底　視覚的理解

1．はじめに

数学 C で扱われる 1 次変換については，

① 1 次変換を，座標平面上の変換 $f:(x,y)\to(x',y')$ が，a,b,c,d を実定数として $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$

で表される変換として定義する。

② $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表されることより，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ より，(x',y')を$(x\ ,\ y)$で表し，

(x',y')が満たす方程式を求める。

といった操作を習熟することが 1 次変換の理解であるがごとく扱われている。

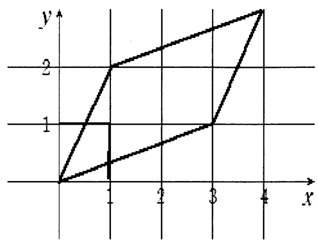
しかし，この操作のみの習熟ならば，学生たちがこの操作から得るものは非常に乏しいものになるだけでなく，1 次変換の本来あるべき理解をも妨げかねない。本稿では 1 次変換について，網羅的に扱うのではなく，視覚的な理解を特に期待したい内容について，その展開例を示す。

堀内　秀紀　〒631-8523　奈良市中登美ヶ丘３-15-１　奈良学園登美ヶ丘高等学校

2. $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$を基底とする場合

2.1　1次変換の定義

座標平面上の変換 $f:(x,y)\to(x',y')$ が，a,b,c,d を実定数として $\begin{cases}x'=ax+by\\y'=cx+dy\end{cases}$ で表されるとき，この変換を本稿では 1 次変換とする。この関係は行列を用いると $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ で表すことができ，行列 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ を 1 次変換 f を表す行列という。1 次変換f が $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ で表されるとき，



$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$
$$=x\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

であることから，この変換は xy座標 におけるx 軸，y 軸方向の基本ベクトル$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を $\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ に変換する移動であることがわかる。 たとえば $\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ の場合，$(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ を頂点とする正方形が，$(0,0),(3,1),(4,3),(1,2)$ を頂点とする平行四辺形に変換される。この変換によって係数x ，y は変わらないことから座標平面上で点が移動することになる。

以上より，$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ で表される 1 次変換については，1 次変換を表す行列$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$の列ベクトル$\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$に着目すれば，行列 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$で表される 1 次変換 f がいかなる移動を表すものかが視覚的に理解できることになる。

例

・ x 軸に関する対称変換は $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ が$\vec{i'}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ，$\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ が$\vec{j'}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ に変換されることからこの変換を表す行列は$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$である。

・ y 軸に関する対称変換は $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ が$\vec{i'}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ ，$\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ が$\vec{j'}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に変換されることからこの変換を表す行列は$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ である。

・原点に関する対称変換は $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ が$\vec{i'}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ ，$\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ が$\vec{j'}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ に変換されることからこの変換を表す行列は$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ である。

・原点の周りにθラジアン回転する変換は $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ が$\vec{i'}=\begin{pmatrix}cos\theta\\sin\theta\end{pmatrix}$ ，$\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ が$\vec{j'}=\begin{pmatrix}-sin\theta\\cos\theta\end{pmatrix}$ に変換されることから，この変換を表す行列は$\begin{pmatrix}cos\theta & -sin\theta\\sin\theta & cos\theta\end{pmatrix}$ である。

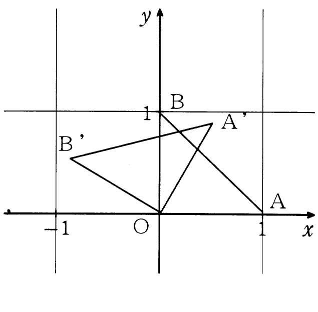
・原点を相似の中心とする相似比k の相似変換は$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ が$\vec{i'}=\begin{pmatrix}k\\0\end{pmatrix}$ ，$\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ が$\vec{j'}=\begin{pmatrix}0\\k\end{pmatrix}$ に変換されることからこの変換を表す行列は$\begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}$ である。

2．2　1次変換 fを表す行列 $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$が$a^2+c^2=b^2+d^2=1, ab+cd=0$ を満足する場合

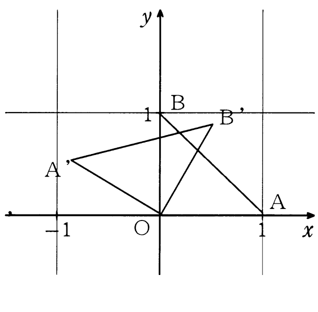
行列 $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$で表される 1 次変換 fがどのような変換であるかは，1 次変換を表す行列$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$の列ベクトル$\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$に着目することにより次のように考えることができる。

$(0,0),(1,0),(0,1)$を頂点とする直角二等辺三角形 OAB は，1 次変換 f によって点 A が点 A',点 B が点 B'に移されるとする。$a^2+c^2=b^2+d^2=1, ab+cd=0$ であることから$|\overrightarrow{OA'}|=|\overrightarrow{OB'}|=1$ ， 内積$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}=0$ が成り立ち，これより直角二等辺三角形 OAB は，自分自身と合同な 3 点$(0,0),(a,c),(b,d)$を頂点とする直角二等辺三角形 OA'B'に移される。ここで， 3 点$(0,0),(1,0),(0,1)$ を頂点とする直角二等辺三角形 OAB のこの 1 次変換f による像直角二等辺三角形 OA'B'は次の 2 つの場合がある。

①



②



これより，1 次変換f は次のような変換といえる。

①の場合は，1 次変換f は原点の周りの回転変換である。

②の場合は，1 次変換f は原点を通るある直線　$y=mx$ （線分 AA'の垂直二等分線）に関する対称変換である。

また，逆に　行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f が①または②の変換であるとき行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $a^2+c^2=b^2+d^2=1, ab+cd=0$ を満たすことは明らかである。

次の①，②，③は同値である。

① 1 次変換 f を表す行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $a^2+c^2=b^2+d^2=1, ab+cd=0$ を満足している。

② 1 次変換 f は原点の周りの回転変換であるか，原点を通る直線に関する対称変換のいずれかである。

③ 1 次変換 f は任意の 2 点間の距離を変えない変換である。

証明

①$\Longleftrightarrow$② はすでに示したとおりである。

②$\Longrightarrow$③ についても明らかである。

③$\Longrightarrow$① については 1 次変換 f は 2 点間の距離を変えない変換であることから，三角形 OAB と三角形 OA'B'は合同な三角形となる。これより①が成り立つ。

以上より①，②，③は同値である。

ここで留意するべき点は

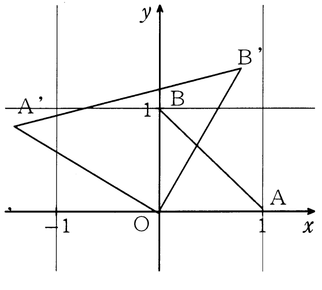
① 1 次変換 f を表す行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $a^2+c^2=b^2+d^2=1, ab+cd=0$ を満足している。

から $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ を頂点とする正方形 OABC は，原点を頂点とする合同な正方形 OA'B'C'に移される。結果このような変換は，①原点の周りの回転変換または②原点を通る直線 $y=mx$ に関する対称変換のいずれかであるといったこと，すなわちイメージとそのイメージが表す数学的内容を連携できることを目標とすることである。

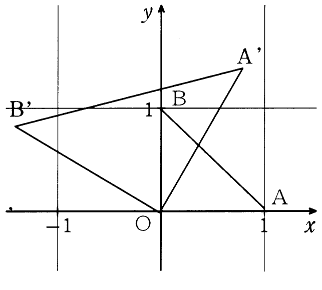
2．3　1次変換 f を表す行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $a^2+c^2=b^2+d^2, ab+cd=0$ 　を満足する場合

$(0,0),(1,0),(0,1)$ を頂点とする直角二等辺三角形 OAB は，1 次変換 f によって点 A が点 A',点 B が点 B'に移されるとする。$a^2+c^2=b^2+d^2, ab+cd=0$ より，$|\overrightarrow{OA'}|=|\overrightarrow{OB'}|$, 内積 $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}=0$ が成り立ち，これより 1 次変換 f によって 3 点 $(0,0),(a,c),(b,d)$ を頂点とする直角二等辺三角形 OA'B'に移されることがわかる。これら 2 つの三角形 OAB と三角形 OA'B'は相似な三角形であることから，次の①，②の場合に限定される。

①



②



これより，1次変換fは次のような変換といえる。

① の場合は1次変換fは原点の周りの回転変換と原点を相似の中心とする相似変換の合成変換である。

② の場合は1次変換fは原点を通る直線に関する対称変換と原点を相似の中心とする相似変換の合成変換である。

また，逆に行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f が①または②の変換であるとき行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が

$a^2+c^2=b^2+d^2, ab+cd=0$ を満たすことは明らかである。

次の④，⑤，⑥は同値である。

④ 1次変換fを表す行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$が$a^2+c^2=b^2+d^2, ab+cd=0$ を満足している。

⑤ 1 次変換fは原点の周りの回転変換と原点を相似の中心とする相似変換の合成変換，または原点を通る直線に関する対称変換と原点を相似の中心とする相似変換の合成変換である。

⑥ 1次変換fは任意の角を変えない変換である。

証明

④$\Longleftrightarrow$⑤ はすでに示したとおりである。

⑤$\Longrightarrow$⑥ についても明らかである。

⑥$\Longrightarrow$④ については 1 次変換fは角を変えない変換であることから，三角形 OAB と三角形 OA'B'は相似な三角形となる。これより④が成り立つ。

以上より④，⑤，⑥が同値であること。

2.4 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される 1次変換fと行列式 $|A|=ad-bc$ について

2.4.1 $|A|=ad-bc=0, \fallingdotseq 0$ と1次変換fについて

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f と行列式 $|A|=ad-bc$ については

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ であることから

$|A|\fallingdotseq 0$ の場合，$|A|\fallingdotseq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ であること，すなわち ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ は1次独立なベクトルであり，従って1次変換fによる図形の像の次元はもとの図形の次元と等しい。

$|A|=0$ の場合，$|A|=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ であることから，図形が1次変換 f によって変換された場合，その図形の像の次元はもとの図形の次元より下がり，平面は直線または点に変換される。

以上にように，$|A| \fallingdotseq 0$ または $|A|=0$ は１次変換 f による図形の像の次元に関わっているといえる。

2．4．2　$|A|=ad-bc=1,2,3$ と 1次変換 f について

$|A| \fallingdotseq 0$ の場合，像の次元は保たれることは 2.4.1 で示したが，$|A| \fallingdotseq 0$ の場合で，たとえばの値が 1，2，3 と異なる場合，この変化は１次変換f の像にどのように影響するのかについては次のように説明できる。

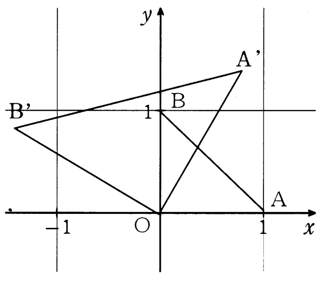
$(0,0),(1,0),(0,1)$ を頂点とする直角二等辺三角形 OAB は，１次変換f によって点 A が点 A',点 B が点 B'に移されるとする。いま $|A| \fallingdotseq 0$ であることから直角二等辺三角形 OAB は３点$(0,0),(a,c),(b,d)$を頂点とする三角形 OA'B'に移される。この三角形の面積は$\frac{1}{2}|ad-bc|$ で表すことができる。これより，行列式$|A|$の値は１次変換 f の像の面積の変化に関わっている。たとえば，行列式$|A|=1$ であるとき，行列A で表される１次変換f は面積を変えない変換，すなわち等積変換である。

2．4．3　$|A|=ad-bc>0\ or <0$ と 1次変換 f について

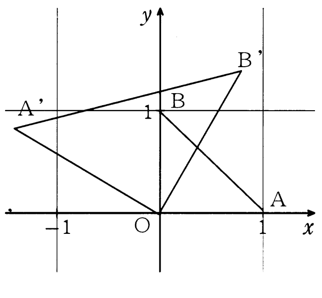
$|A| \fallingdotseq 0$ の場合で，たとえばの値が 1，-1 というように行列式$|A|$の絶対値は等しいが符号が異なる場合，この符号の変化は 1 次変換 f の像にどのように影響するのかについて扱う。2.4.2 で示したように行列Aで表される１次変換f は面積を$|A|$の絶対値倍にする変換である。それでは行列式$|A|$の符号の相違は，1 次変換 f の像にどのように影響するのか。

次の①，②の場合を使って，その違いを感覚的に捉えることにする

①



②



①と②の違いは，①では三角形 OAB，三角形 O'A'B'ともに時計の針と反対方向に O → A → B，O'→ A'→ B'となっている一方，②では三角形 OAB では時計の針と反対方向に O → A → B となっているのに対し，三角形 O'A'B'では時計の針と同じ方向に O'→ A'→ B'となっている点である。

これらの違いは次のように変換すると明確になる。

①，②いずれの場合も適当に原点の周りに回転変換させることで点 A の像，点 A'がx 軸上の正の部分になるようにできる。点 A をx 軸上の正の部分に移す変換は，行列$\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}$ただし$p>0$ で表すことができる。

このとき①，②の場合のそれぞれの点 B'の位置に着目すると，①の場合は点 B'のy 座標が正となるが，②の場合は点 B'のy 座標が負となる。点 B の座標は(q,s)であることから①の場合は，$s>0$，②の場合は，

$s<0$ となる。

従って行列$\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}$の行列式の値 $\begin{vmatrix} p & q \\ 0 & s \end{vmatrix}=ps$ は①の場合は正，②の場合は負となる。

①，②の変換を表す行列Aは，$\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}A$ が成り立ち，行列式については

$\begin{vmatrix} p & q \\ 0 & s \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}\cdot|A|$，$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=1$ が成り立つことから $\begin{vmatrix} p & q \\ 0 & s \end{vmatrix}=|A|$ を得る。

以上より行列Aで表される１次変換fにおいて，行列式$|A|$の符号の相違は，１次変換 f の像の向きに関係し

行列式$|A|$が正ならば，１次変換fは図形の向きを変えずに変換する

行列式$|A|$が負ならば，１次変換fは図形の向きを逆向きにして変換する

といえる。

３．１次独立なベクトル$\vec{u}$，$\vec{v}$を基底とする場合

１次独立なベクトル$\vec{u}$，$\vec{v}$を基底とする場合，行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で表される１次変換 f について，$f:(x,y)\to(x',y')$

とするとき，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ といった表面的な部分は変わらない。

しかし，$\vec{i}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{j}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$を基底とする場合は$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$は点の座標と一致していたが，１次独立なベクトル

$\vec{u}$，$\vec{v}$を基底とする場合は$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$はそれぞれベクトル$\vec{u}$，$\vec{v}$の係数となる。

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(x\vec{u}+y\vec{v})=x\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\vec{u}+y\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\vec{v}$ であるので，このことはfを用いて

$f(x\vec{u}+y\vec{v})=xf(\vec{u})+yf(\vec{v})$ を表すことができる。これより，１次独立なベクトル$\vec{u}$，$\vec{v}$を基底とする場合についても，基底である１次独立なベクトル$\vec{u}$，$\vec{v}$の１次変換 f による変換の様子を捉えれば，１次変換 f を視覚的に捉えることができる。基底をうまく選択すれば，１次変換 f そのものを見やすくなることを次の例で示す。

３．１　原点を通る直線$y=mx$に関する対称変換について

基底として直線$y=mx$の方向ベクトルと法線ベクトルすなわち$\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底とする。次の

①，②は同値である。

① 1次変換 f が直線 $y=mx$ に関する対称変換である

② $f(\vec{u})=\vec{u}, f(\vec{v})=-\vec{v}$

これより，1次変換 f を表す行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$

すなわち $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}$ を満たしている。$\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \nparallel \vec{v}=\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$

であるので，$\begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ が存在し，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を得る。

基底を $\vec{i}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{j}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として考えた場合，直線 $y=mx$ に関する対称変換は次のような行列で表される1次変換として捉えることができる。今 $m=\tan\theta$ とする。

3．1．1 行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathit{con}(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$ で表される1次変換

$m=\tan\theta$ であることから直線 $y=mx$ と x 軸の正方向とのなす角は θ である。従って直線 $y=mx$ に関する対称変換とは

(ア) 原点の周りに $-\theta$ 回転する。(直線 $y=mx$ は x 軸となる。)

(イ) x 軸に関して対称移動する。

(ウ) 原点の周りに θ 回転する。(x 軸は直線 $y=mx$ になる。)

といった変換の合成変換としてみることができる。

3．1．2 行列 $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で表される1次変換

直線に関する対称変換によって図形の向きは逆になることから

(ア) x 軸に関して対称移動する。

(イ) 直線 $y=mx$ と直線 $y=-mx$ のなす角は x 軸の正方向を基準それぞれ θ であることから，原点の周りに時計の針と反対方向に 2θ 回転させる。

といった変換の合成変換としてみることができる。

この証明は，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ の変化に着目しいくつかの基本的な1次変換の合成変換としてみる等，学生にとって意義のある演習である。

3.2　原点を通る直線$y=mx$への正射影について

基底として直線$y=mx$の方向ベクトルと法線ベクトル，すなわち$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix},\vec{v}=\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}$ を基底とする。

次の①，②は同値である。

① 1次変換 f が直線$y=mx$への正射影

② $f(\vec{u})=\vec{u}$, $f(\vec{v})=\vec{0}$

これより，1次変換 f を表す行列$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$は $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

すなわち $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-m\\m&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\m&0\end{pmatrix}$ を満たしている。$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\not\parallel\vec{v}=\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}$

であるので，$\begin{pmatrix}1&-m\\m&1\end{pmatrix}^{-1}$ が存在し，$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\m&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-m\\m&1\end{pmatrix}^{-1}$ を得る。

基底を$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$として考えた場合，直線$y=mx$への正射影は。$m=tan\theta$ とすると，この正射影は，行列 $\begin{pmatrix}cos\,\theta&-sin\,\theta\\sin\theta&cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}con(-\theta)&-\sin(-\theta)\\sin(-\theta)&\cos(-\theta)\end{pmatrix}$ で表される1次変換である。

また，行列$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$が 1 次変換 f が直線$y=mx$への正射影を表すとき，$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とすると，$A^2=A$ を満たすことは，1次変換 f が直線$y=mx$への正射影を表すことを考えれば明らかである。

これらの例のように，1 次変換f を考える際に，適切に基底を選択すれば，その変換の仕組みが非常に見えやすくなる。この２つの例に共通することは 1 次変換f に対して，$f(\vec{u})=k\vec{u}$ （kは実数）を満たす基底を選択している点である。

4　固有値と固有ベクトル

行列Aに対して$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$かつ$\vec{x}\neq\vec{0}$を満たすベクトル$\vec{x}$が存在するとき，λを行列Aの固有値，各λに対してそれぞれ決まるベクトル$\vec{x}$を行列Aの固有ベクトルという。本稿ではλを実数に限定する。

いま，$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とすると，λは２次方程式$t^2-(a+d)t+ad-bc=0$の解である。この２次方程式を行列$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$の固有方程式という。

4．1　固有ベクトルと基底

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f において，

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式 $t^2-(a+d)t+ad-bc=0$ が相異なる 2 実数解 λ_1，λ_2 を持ち，λ_1，λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{u}_1$，$\overrightarrow{u}_2$ とする。このとき異なる固有値に対する固有ベクトルは 1 次独立であるから，$\overrightarrow{u}_1$，$\overrightarrow{u}_2$ を基底として平面上の任意のベクトルはこれら 2 つのベクトルの 1 次結合すなわち $\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}$（$\alpha$，$\beta$ は実数）で表すことができる。これら固有ベクトルを基底にした場合，このベクトルの 1 次変換 f による像は $f\left(\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}\right)=\alpha f\left(\overrightarrow{u_1}\right)+\beta f\left(\overrightarrow{u_2}\right)=\alpha\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\beta\lambda_2\overrightarrow{u_2}$ となり，基底のベクトルの実数倍といった変換となり 1 次変換自身が非常に見やすくなる。この点が，固有ベクトルを基底にした場合の利点である。

すでに扱った原点を通る直線 $y=mx$ に関する対称変換は固有値が 1 と－ 1 の場合であり，また原点を通る直線 $y=mx$ への正射影は固有値が 1 と 0 の場合である。

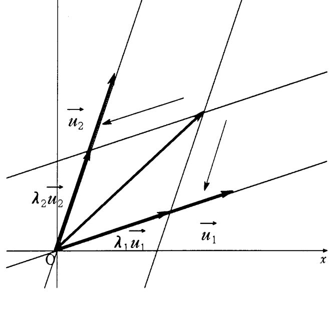
また 1 次変換によって図形の向きの変化は，行列式 $|A|$ の正負によって判定できることはすでに示したとおりであるが，行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式 $t^2-(a+d)t+ad-bc=0$ に着目すれば，行列式 $|A|$ の正負と図形の向きの関係がより視覚的に理解することができる。行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ は固有方程式の定数項に現れている。従って，行列式 $|A|$ の正負は固有方程式 $t^2-(a+d)t+ad-bc=0$ の実数解が（ｉ）同符号，（ii）異符号と対応している。すなわち，

（ｉ）行列式 $|A|$ が正　→　固有方程式 $t^2-(a+d)t+ad-bc=0$ が同符号の実数解

（ii）行列式 $|A|$ が負　→　固有方程式 $t^2-(a+d)t+ad-bc=0$ が異符号の実数解

ここで 1 次変換 f による像は $f\left(\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}\right)=\alpha f\left(\overrightarrow{u_1}\right)+\beta f\left(\overrightarrow{u_2}\right)=\alpha\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\beta\lambda_2\overrightarrow{u_2}$ であること，すなわちこの 1 次変換 f によって，基底として選択した固有ベクトルの実数倍に変換されるから固有方程式の解が同符号の解を持つときは図形の向きを変えず，異符号の解を持つときは図形の向きを逆にすることは視覚的に容易に理解できるであろう。

4．2 スペクトル分解



行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の相異なる固有値 λ_1，λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{u}_1$，$\overrightarrow{u}_2$ とする。このとき異なる固有値に対する固有ベクトルは 1 次独立であるから，$\overrightarrow{u}_1$，$\overrightarrow{u}_2$ を基底として平面上の任意のベクトルはこれら 2 つのベ

任意のベクトル$\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}$に対し $P(\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2})=\alpha\overrightarrow{u_1}$ $Q(\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2})=\beta\overrightarrow{u_2}$ を満たす行列P ，Qは，ベクトル$\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}$の原点を通り，$\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$ を方向ベクトルに持つ直線への射影を表す行列である。このとき，行列P ，Qは

ⅰ．$P^2=P, Q^2=Q$

ⅱ．$PQ=QP=O$

ⅲ．$P+Q=I$

ⅳ．$A=\lambda_1 P+\lambda_2 Q$

を満たしている。

行列Aを ⅰ．$P^2=P, Q^2=Q$，ⅱ．$PQ=QP=O$を満たす行列P ，Qを用いて，$A=\lambda_1 P+\lambda_2 Q$（$\lambda_1$，$\lambda_2$は実数）の形で表すことをスペクトル分解という。

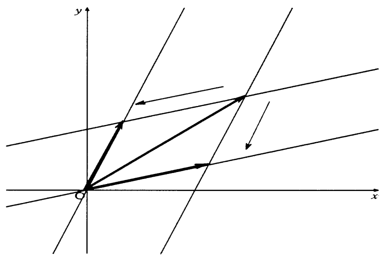
ここでは厳密性は欠けるが次のような理解を求めたい。

① 固有ベクトル$\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$ は１次独立である。

② 任意のベクトルはこれら$\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$ を用いて，１次結合すなわち$\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}$（$\alpha$，$\beta$は実数）で一意的に表される。

③ 行列P ，Qで表される１次変換はそれぞれ任意のベクトルの$\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$ 方向の成分を表す変換である。

以上の３点に着目すれば



ⅰ．$P^2=P, Q^2=Q$

ⅱ．$PQ=QP=O$

ⅲ．$P+Q=I$

ⅳ．$A=\lambda_1 P+\lambda_2 Q$

であることを次のように視覚的に理解できる。

すなわち，ⅰ，ⅱについては右図を使いながら，行列P ，Qで表される１次変換は，それぞれ任意のベクトルの$\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$ 方向の成分を表す変換であることから$P(\overrightarrow{u_1})=\overrightarrow{u_1}$,$P(\overrightarrow{u_2})=\vec{0}$，$Q(\overrightarrow{u_2})=\overrightarrow{u_2}$,$Q(\overrightarrow{u_1})=\vec{0}$ が成り立つことを根拠に理解すればよい。

ⅲについては，

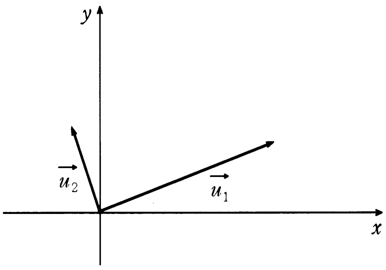
②任意のベクトルはこれら$\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$ を用いて，１次結合すなわち$\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}$（$\alpha$，$\beta$は実数）で一意的に表される。

③行列P ，Qで表される１次変換は，それぞれ任意のベクトルの$\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$ 方向の成分を表す変換である。

の２点に着目すればよい。

ⅳについては2つのベクトル$\vec{u}_1$，$\vec{u}_2$ が行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の相異なる固有値λ_1， λ_2に対する固有ベクトルであることより，行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で表される1次変換とは，任意のベクトルを2つのベクトル$\vec{u}_1$，$\vec{u}_2$ 方向について分解し，それぞれをλ_1， λ_2倍する変換であると考えればよい。

4．3　対称行列と固有ベクトル



対称行列については，2 × 2 行列では特徴が見えにくい行列であるが行列$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$のように2×2行列では1-2成分と2-1成分が等しい行列をいう。

行列$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$の固有方程式が異なる2つの実数解$\lambda_1$、$\lambda_2$を持ち，$\lambda_1$，$\lambda_2$に対する固有ベクトルをそれぞれ$\vec{u}_1$，$\vec{u}_2$とする。

2つの固有ベクトル$\vec{u}_1$，$\vec{u}_2$は内積$\vec{u_1}\cdot\vec{u}_2=0$ を満たすことから対称行列$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$で表される1次変換$f$ は，

たとえば$\overrightarrow{u_1}=r(cos\,\theta \quad sin\,\theta)$ とすれば，

$\begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} con(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$ で表すことができる。

これより，対称行列$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$で表される1次変換$f$ は原点の周りの回転変換と行列$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$で表される1次変換すなわち$x$ 軸方向にλ_1倍，y 軸方向にλ_2倍拡大または縮小する1次変換の合成変換であることがわかる。

5　まとめ

本稿では2×2行列で表される1次変換について，

① 論理的な厳密さよりは視覚的な理解を重視する。

② 1次変換の内容についても網羅的には配列したものではなく，最も特徴的な場面のみを扱う。

③ 2 × 2 行列で表される1次変換特有の扱い方を多用しできるだけ直感的あるいは視覚的に理解しやすい説明をつける。

④ 今後学習するであろう線形写像にできるだけスムーズに移行できることを意図した説明をつける。

の以上の点に留意し，1次変換を視覚的に理解することを目標とした。従って数学Cで主に扱われている直線や領域の1次変換による像，あるいは逆像といった個々の図形についての1次変換の扱い方は割愛した。必要ならば本稿で扱った内容の理解のもとに，直線と1次変換については固有ベクトルの理解の後に扱うことで，より視覚的に理解できるであろう。数学におけるリメディアル指導においては，教材の構成において，

素材が学生のなかで視覚的につながり，そのようにならざる得ないといったある種の必然性を伴いながら展開されていくかという観点が不可欠である。リメディアル指導に用いる教材については，単に厳密性のみに重点を置くのではなく，厳密性と直感的（あるいは日常的）のバランスの意図的なアレンジ，それぞれの段階あるいは場面に応じて，扱う素材の選択等教材の構成における演出は不可欠である。今後単に表面的な楽しさだけではなく，与えられた教材によって学生が学生自身の言葉でそれぞれの概念を理解するあるいは扱うといった内面的な活動を引き起こすような演出がなされた教材あるいは教程が登場し，学生のみならず指導者をも楽しませてくれることを期待したい。

参考文献

・　秋山仁 (1993)　1 次変換のしくみ　174pp　駿台文庫
・　飯高茂・松本幸夫 (2010)　数学 C　175pp　東京書籍
・　大島利雄他 (2009)　数学 C　176pp　数研出版
・　砂田利一 (1995)　行列と行列式　167pp　岩波書店
・　鈴木守 (1988)　ビジュアル線形代数　162pp　現代数学社