# 思考力・判断力・表現力を育成する算数授業
## －算数的活動を支える教材研究－

# Developing Students' Ability to Think, to Make Decisions and to Express Themselves in Mathematics Classes
## －A study of Teaching Materials to Support Mathematical Activities－

金山　憲正
Norimasa Kanayama

## 1. はじめに

平成20年１月の中央教育審議会の答申では、「ゆとり教育」からの脱却の方向性が示され、それを受けて改訂された学習指導要領が平成23年４月から全面実施されている。

今回の改訂された学習指導要領の算数科において、特に注目すべきことがある。その一つ目は、「算数的活動を通して」が算数科の目標全体にかかるように改訂されていることである。

「算数的活動を通して」という記述は、目標を実現するための学習指導方法の原理を述べたものであり、目標にこのような学習指導方法が示されるということは極めて異例のことと言えるからである。その二つ目は、各学年の内容に算数的活動についての具体例が記述され位置付けられたことである。これもこれまでの学習指導要領には見られなかったことである。

教育現場では、今回の学習指導要領において指導方法に関する「算数的活動を通して」の文言が目標のはじめに示され、それにとどまらず各学年の内容に算数的活動の概略までもが示されている意図をしっかり捉えて日々の実践に取り組む必要がある。

このような形で算数的活動が取り扱われている意図は、数量や図形の意味を実感をもってとらえたり、思考力、判断力、表現力等を高めたりできるようにするとともに、算数を学ぶことの楽しさやよさを実感できるような学習指導の充実を意図していることに他ならない。つまり、子どもが問題の解決に向けて主体的に取り組むような学習活動を目指しているのである。そのためには、算数の授業を教師の説明中心の授業から、児童の主体的な活動が中心となる問題解決型の授業に転換することが必要になる。算数的活動を具体的に示すことで、教師に授業の質を転換することを要求し、どちらかというと解説型の手抜きの算数授業をしていた教師に猛反省を促していると考えられる。

算数の授業を充実させようとしたとき、算数的活動がどのような活動のことを示しているのかを明確に捉えていなければ指導の効果は期待できない。学習指導要領の解説には、「児童が目的意識をもって取り組む算数に関わりのある様々な活動」と記され、身体を使ったり具体物を用いたりしながら、算数に関する課題について考えたり、算数の知識をもとに、発展的、実用的に考えたりする活動や、考えたことなどを表現したり説明したりする活動と示されている。

　ここでしっかりと捉えておきたいことは、算数的活動の中心は思考活動であるということである。作業的活動や体験的活動は、思考活動に達するための過程であり、ただ単に作業や体験を取り入れれば「算数的活動を通した」ということではない。つまり、手や身体を使った活動や具体物を用いた活動を取り入れても、思考活動を伴って算数を創り上げていく活動に進んでいかなければ算数的活動とはいえないのである。

　このように算数的活動は、創造的、発展的、発見的な学習活動であり、思考活動であるともいえるのである。当然、教師の説明を一方的に聞くだけの学習や、単なる計算練習を行うだけの学習は算数的活動には含まれないのである。

　以上のように捉えられる算数的活動を取り入れる際には、教師がその目的を明確に持ち、目的を達成させるためにはどのようなことに留意することが必要なのかを十分に把握した上で指導に臨まなければならない。なぜなら、教師の教材分析力が授業の質を決定づけるからである。つまり、算数的活動を取り入れて充実した問題解決型の授業を展開するためには綿密な教材研究が不可欠なものであり、そのことが成果の上がる授業になるか否かの鍵を握っていると言っても過言ではないのである。

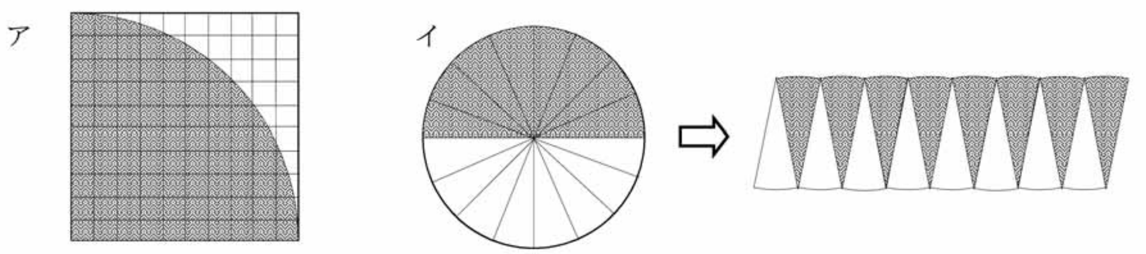
　主体的な問題解決活動を展開するためには問題解決の際に生きて働く知識・技能や考え方などを子どもたちが既に十分身に付けておかなければならないことは当然のことである。それと共に、既習の知識・技能・考え方などを工夫して活用することで問題の解決が図れるような展開になるように、指導の流れを筋の通ったものにする必要がある。つまり、単元の構成や展開を工夫して、既習の学習内容を関連づけることができるように１時間の授業展開を考えなければならないことはもちろん、単元全体を見通したり単元間のつながりを考慮した指導計画が要求されるのである。

　どのような指導計画が求められるのかということになるが、その具体的な例として第６学年「円の面積」に関わる一連の指導を取り上げ、算数的活動が主体的に展開するような単元構成の工夫について考察する。

## 2. 単元「円の面積」について

　今回の学習指導要領の改訂では、円の面積が第５学年から第６学年の方に移行されている。その理由は、円が直線で囲まれている図形ではないため、第５学年の子どもには少し困難が伴うのではないかとの判断や、第５学年の指導内容が今回の改訂で非常に多くなっていることからの判断ではないかと考えられる。

　第６学年に移行された内容なので扱いはどう変わったのかと、学習指導要領の解説を見ると、そこでは次のようなアとイのアイデアが紹介されている。



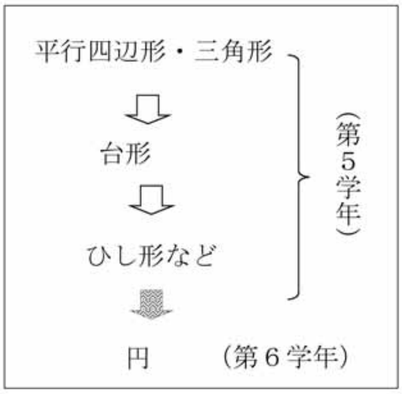

　この２つのアイデアはこれまでから教科書等でもよく扱われていたものである。アは方眼上にある１/４円が示され、円の内側にある方眼の個数を数える方法である。イは円を直径で等分して出来るおうぎ形を並べ替えて平行四辺形に近い形をつくる方法である。

　この中で、アの方法は第４学年で正方形、長方形の面積を求積する際に用いられた方法である。しかし、第５学

年の平行四辺形や三角形の面積を求積する際には、この方眼を数える方法では正確に数えられないとの理由やあまり能率的でないといった理由で、もっとよい方法はないかと考えさせている。そして、求積公式が分かっている長方形に変形して求積する等積変形や倍積変形のアイデアを導入してきている。にもかかわらず、一度否定された方法がまたこの単元（円の求積）に出てくるというのは、子どもの意識や指導の流れとして本当に良いのか疑問に感じるところである。

また、イの円を直径で分割して並べ替えて長方形にする方法は非常に合理的な方法であるが、この方法のもとになる直径で分割することをこれまでの学習で子どもたちは経験していない。そのため、円の面積を工夫して求めることに挑ませたとしても、子どもたちは直径で分割する方法を見つけることが難しく、結局は指導者が分割し等積変形する方法を示して納得させるという解説型の授業に陥ってしまう可能性がある。問題解決型での指導の原則は既習の学習内容を活用させることにあるので、ここでは事前に円の面積を求める学習につながる経験をどの場面でどのようにさせるのかを考えなければならないのである。

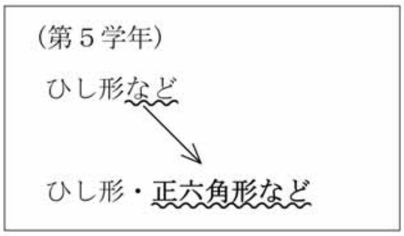
## 3.「円の面積」につながる単元構成の試案




学習指導要領では、右に示してあるように、図形の面積に関する指導は、第５学年では平行四辺形、三角形、台形、ひし形などを、続いて第６学年で円を扱うことになっている。先にも述べたが、児童にとって困難が伴うとの判断から第６学年に移行された「円の面積」であるだけに丁寧な指導が必要になる。

さらに、基礎的・基本的な知識及び技能を確実に身に付けることと、身に付けた知識及び技能を活用することが重視されている今回の改訂の趣旨からも大いに工夫を要するところである。

そこで、「歯止め規定」が外されたことでもあるので、第５学年の「図形の面積」の単元で「正多角形の面積」を扱い、「円の面積」の学習の際に効果的に活用されることが期待できる等積変形の考え方を経験させておく展開を提案する。

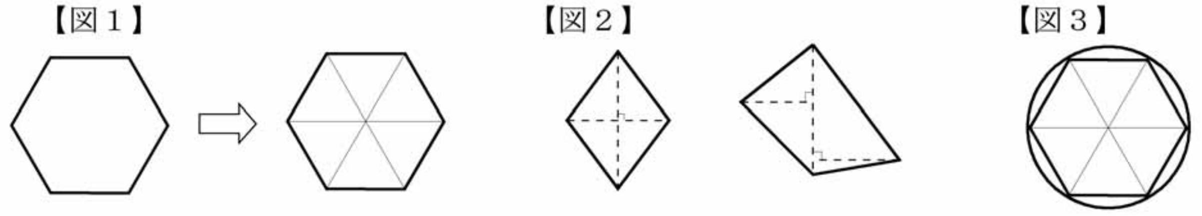



では、どこでその考え方を経験をさせるのかというと、第５学年の「図形の面積」における一連の指導「平行四辺形・三角形」→「台形」→「ひし形など」の「ひし形など」のところで「正多角形（正六角形）」の面積の求め方を考える学習の場を設定するのである。

その理由は、例えば正六角形という正多角形の面積の求め方を考えさせる段階を通すことにより、円を直径で等分しておうぎ形に分けたり、おうぎ形を並べ替えて既習の図形に等積変形したりするアイデアが生まれてくることが期待できるからである。

## 4.「正六角形の面積」の扱い

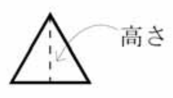
正六角形の面積の求め方として、図１のように正六角形を作図する際に利用した円の直径にあたる対角線で三角形に分割する方法がまず最初に出てくる。




その理由は、直前に学習したひし形や一般の四角形で、図２のように対角線で三角形に分割して面積を求めたことを経験しているからである。

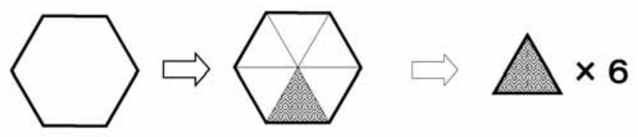
さらに、円周率を学習した際には、円周が直径の３倍よりも長いことを説明する学習において図３のように「正六角形の一辺」「正三角形の一辺」「円の直径・半径」を関連づけて考える経験をしていることも、正六角形を三角形に分割する方法を想起させることになっている。

正六角形の面積は主に次に取り上げる５つの求め方が考えられる。これらの考えは円の面積を求める際に関連づけられるのでそのことを見通してきめ細かく配慮した指導が必要である。なお、正六角形の一辺の長さの数値を示して面積を求めさせる場合には、正三角形の高さについては無理数になるので用いる数値として小数第２位ぐらいの数値を与えるようにする。



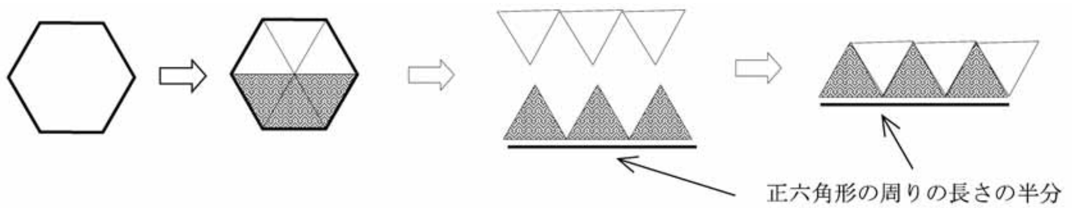

a　１つの正三角形の面積を求めて６倍する

この考え方は上にも述べたが、これまでの学習経験から最も多くの子どもが考えつく方法である。既習の面積を求めることができる図形に分割したり変形したりしようとする態度が身についてきている証である。




b　並べ替えて平行四辺形にする（等積変形）

分割した三角形を並べ替えて平行四辺形にする等積変形の考え方である。平行四辺形の底辺は六角形の周りの長さの半分になっていることから、面積が周りの長さにも関係していることを意識することになる。

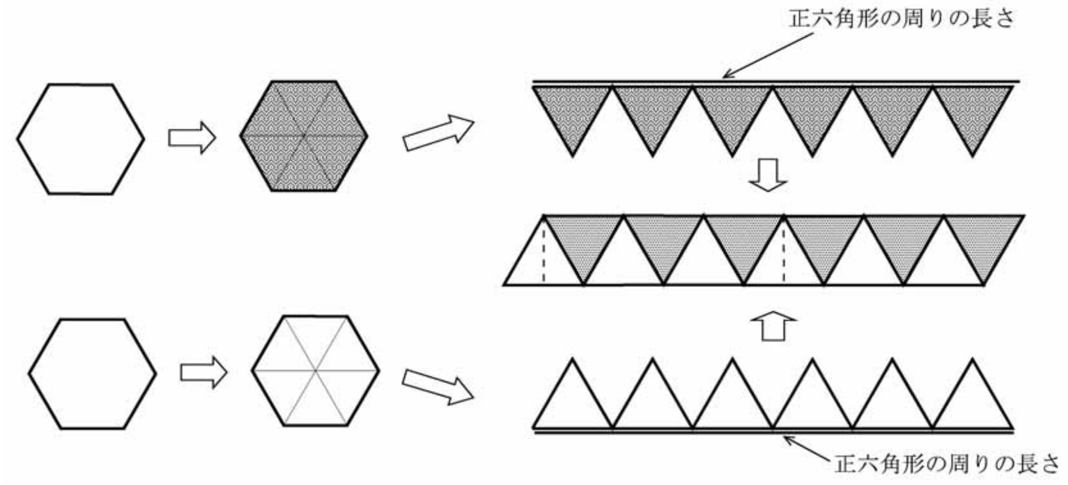



この考え方は、正六角形を印刷してあるプリントを配付して考えさせても出てこない。この場合は、正六角形の切り抜きを数枚配付して正三角形を切り取って操作することが可能な状態で考えさせるようにすることが重要である。

c　正六角形を２つ合わせて平行四辺形にする（倍積変形）

正六角形を数枚操作していく中から、ｂとよく似ているが、２つの正六角形を展開したものを組み合わせて平行四辺形にする求め方、つまり倍積変形の考え方である。

この変形では底辺がちょうど六角形の周りの長さになる。

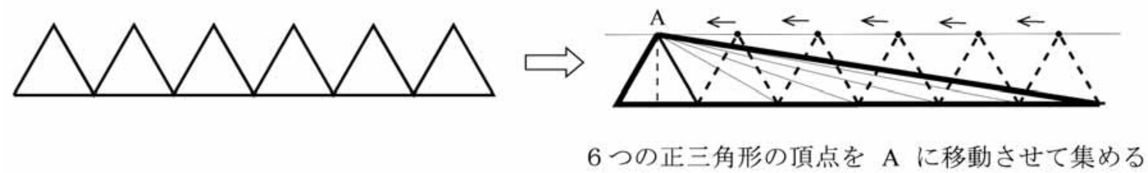



d　大きな三角形にする（1）（等積変形）

この方法は、三角形に分けたものを横一列に展開する。そして並べた三角形の高さは同じであることに着目して、下図右のようにそれぞれの三角形の頂点を点Aに移動させて等積変形し、ばらばらな三角形を合体させて一つの大きな三角形に変形していく考え方である。

正六角形の周りの長さが正三角形を６つ合わせて出来た大きな三角形の底辺になり、結局、（周りの長さ）×（高さ）÷２　で求めることが出来るのである。

この考え方は、移動可能な切り抜きを操作する過程を貼り付けたり、ノートにかき写したりした記録を考察する活動を通すことによって発見が容易になる。

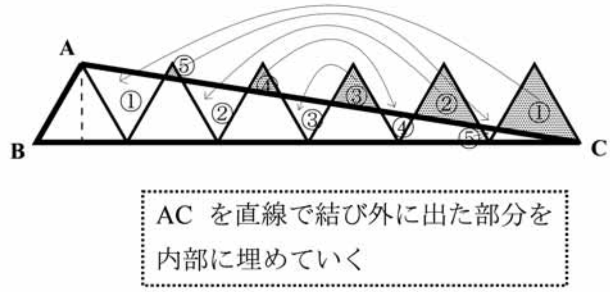


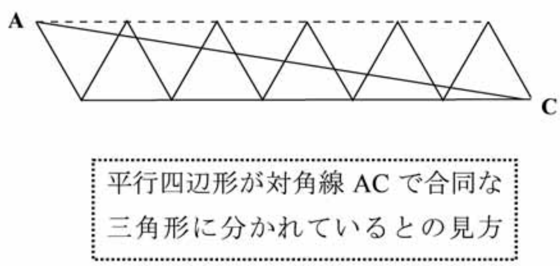

６つの正三角形の頂点を　A　に移動させて集める

e　大きな三角形にする（2）（等積変形）

この方法もdと同様、正三角形を６つ並べた状態をもとにした考察により見つけ出されてくる。直線ACからはみ出している部分と合同な部分が対であることに気づき、対応する部分を移動させて変形していく考え方である。

下図左は一つの大きな三角形に変形しようとする意図を持ってACを直線で結ぶのであるが、いきなりこの方法に気づくことは容易ではない。むしろ、下図右のように右５つの正三角形の部分に着目し平行四辺形を見つけ、その対角線としてのACを手がかりに考える方が気づきやすいという実態が見られた。



正六角形の面積の求め方を考える指導について述べてきたが、単に「円の面積」の指導前にこの指導を入れたからそれで「円の面積」の学習が充実したものになるというわけではない。重要なのは正六角形を扱った指導に至るまでと、先を見通したここでの指導をいかに関連づけるかということである。つまり、一連の指導の効果を十分に得るためには、「三角形や台形などの面積」の指導の際に「正六角形の面積」で活用される基礎的な知識や図形の見方を定着・補充しておくことが大前提となる。

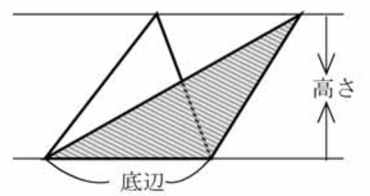
具体的にどのような基礎的な知識や見方を定着・補充する必要があるのかについて三角形・台形を例に挙げて述べる。

## 5. 正六角形に至るまでの指導

### ①三角形の面積の指導において

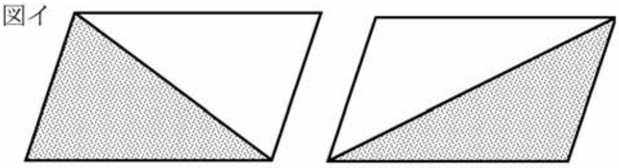
三角形の面積が底辺と高さが同じであれば面積も同じであるということは、子どもたちにとって分かりやすそうで分かりにくい内容の一つである。

図ア




教科書においては、見かけの形は違うが底辺と高さが同じ数値になっている三角形を２、３提示してそれらを求積させ、右図アのような図を示してまとめ、その理由を説明させる扱いである。

図イ

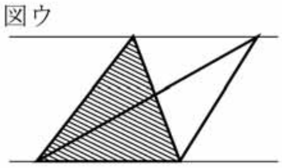


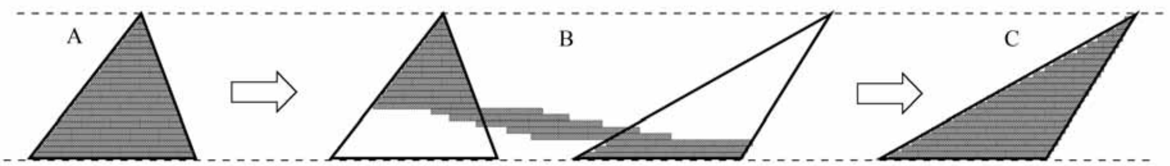
対角線で分けているので２つの三角形の面積は同じ

また、指導の順序で平行四辺形の面積を三角形の面積より先に指導している場合には、図イのように平行四辺形を対角線で三角形に分割し、どちらの三角形も元の平行四辺形の面積の半分で底辺と高さも同じであることから理解させることも出来る。この「底辺と高さが同じであれば面積も同じである」ことは、正六角形や円の面積の求め方を考える際に等積変形の手段としてよく用いられるので、自由に活用できるようになる段階まで理解を深めておくことが重要である。そのための指導の工夫として、前に挙げた具体的な数値や平行四辺形を手がかりにして理解を図るという静的なとらえ方の指導に併せて、下に示すようなアニメーションを用いて動的なとらえ方をさせる指導を行うことによって理解の深まりが期待できる。

その概要を以下に示してみる。ステップＡは内部が空白の三角形を提示し、そこに幅が同じである細い棒を積み上げていき三角形の内部を埋め尽くしていくアニメーションである。ここでは、積み上げた棒全体の面積が三角形の面積と等しくなっていることをおさえることがポイントである。次にステップＢに移るのであるがその前に２つの三角形を重ね合わせて（図ウ）、どちらも底辺と高さが同じ三角形であることを確認させる。

図ウ



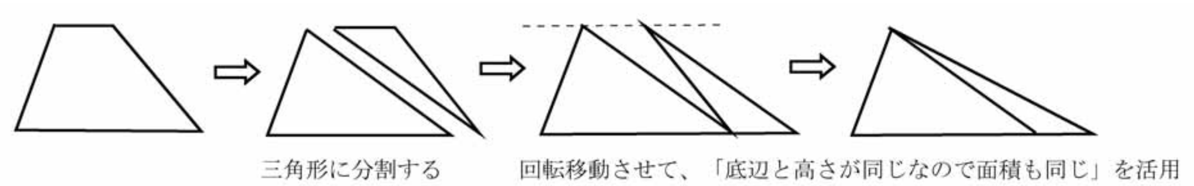


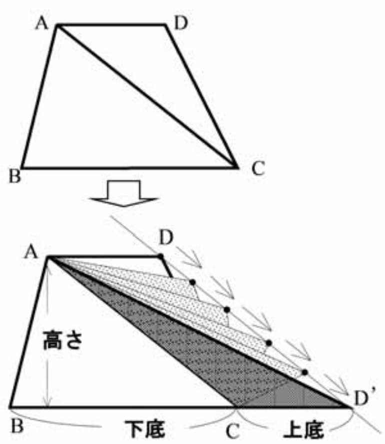
その上で、左の三角形の内部にある棒を１本ずつ右の三角形へと移していく。ステップＣは移動させた結果を表しており、左の三角形の内部から移動させた棒で右の三角形の内部を埋め尽くした状態である。棒の本数が変わらなければ面積も変わらないことは容易に理解できるので、上のように棒を移動させて変形していく様子をアニメーションで示すことは、三角形において底辺と高さが同じであれば形が変わっても面積は変わらず同じであることを理解させる上で効果的である。

こうして底辺と高さが変わらなければ面積は同じということをいろいろな活動を通して指導したからと言って、それだけでは自由に使えるまでにはなかなか身につくものではない。活用することの大切さがよく取り上げられているように、学んだ内容を機会ある毎に活用して問題解決していくような場を意図的に設け、活用することのよさを味わわせていくことが理解を深める上でとても重要になるのである。

**②台形・ひし形などの面積の指導において**

台形の面積の求め方を考える際、２つの三角形に分けるという考えが出てくるが、それで終わらせずに回転移動もさせ、底辺と高さが同じなので面積が同じになるという知識を活用させるのである。




活用することにより理解が深まり、理解が深まればさらに積極的に活用していくことになるのである。また、この考えを扱うことにより、（上底＋下底）×高さという台形の面積を求める式も非常にスムーズに理解できるのである。

さらに、もう一つ底辺と高さが同じ三角形なら面積も同じになることを活用する考え方がある。（右図）

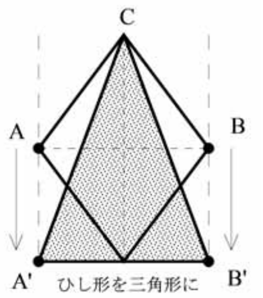
台形を対角線で２つの三角形に分けるところまでは前出の方法と同じである。次に点Ｄを通り対角線ACと平行な直線を右のように引く。その後、点Ｄを今引いた直線と底辺の延長線との交点D'まで順に移動させると三角形ABD'になる。

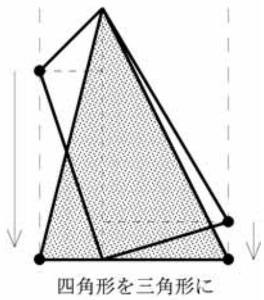
これは、三角形ABCのACを底辺とした場合、残りの頂点が点Ｄを通る平行線上のどこにあっても高さは同じであるため面積も同じになることを利用した等積変形の考え方である。この考え方はこれまでに、安定した位置にある図形ばかりでなく、不安定な位置にある図形と接する機会がどれだけあったかということも大きく影響するところである。

このように三角形で習得した知識を台形でも活用することにより、知識がより確実なものになると共に、今後も積極的に活用していこうとする態度を育てることにもなる。例えば、台形の後に指導するひし形や一般の四角形の面積を求める際にも大いに活用させたい
ものである。

ひし形の場合であれば、右のように一方の対角線と対角線上にない頂点Ａ，Ｂを通る平行線を両側に引く。頂点

A，Bをそれぞれ平行線上を頂点A'，B'まで移動させる。これにより元のひし形が三角形A'B'Cに等積変形できたのである。ここでも、三角形の底辺と高さが同じであれば面積が同じであるきまりを使って考えることのおもしろさを味わわせることが出来るのである。ひし形においてこの等積変形の方法での求積を経験することにより、次に対象とする一般の四角形の場合にも同様の考え方を適用して求積しようとする活動につながる。こうして、台形、ひし形、一般の四角形を三角形に等積変形して求積する方法を知ることは、全ての形は三角形に変形することが出来るのではないかとの見通しを持つことになり、次に学習する円の面積の求め方を考える際に「三角形」を意識した取り組みが期待できる。

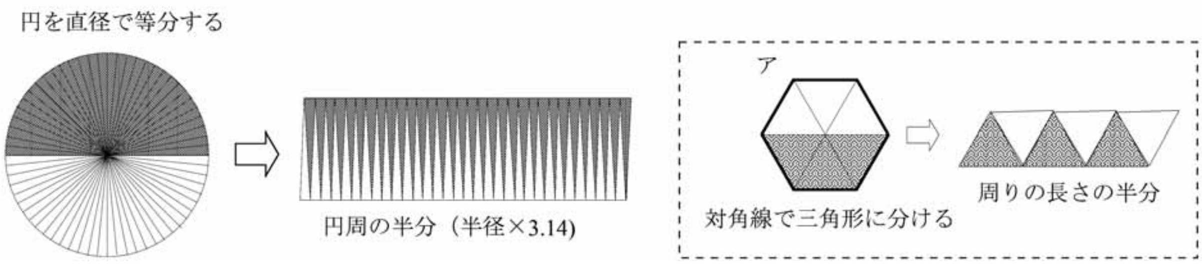



## 6. 円の面積の学習において

円の面積を求める際の円を直径で等分する発想は、正六角形のところで等分するという考え方を経験しているため、比較的スムーズに出て来る実態がある。

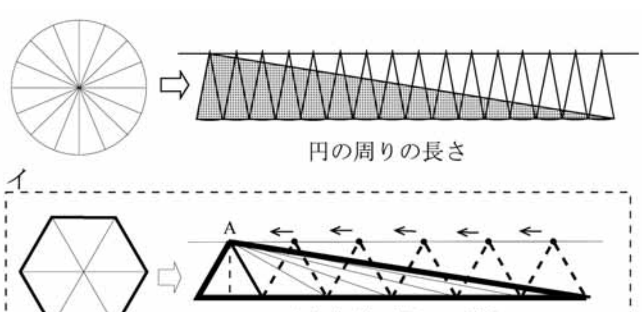
直径で等分してからの処理の仕方であるが、まず最もよく扱われるのが教科書や解説書等でも紹介されている方法である。下図のように細かく切って並べ替えると、非常に長方形に近くなっていっていることが分かる。



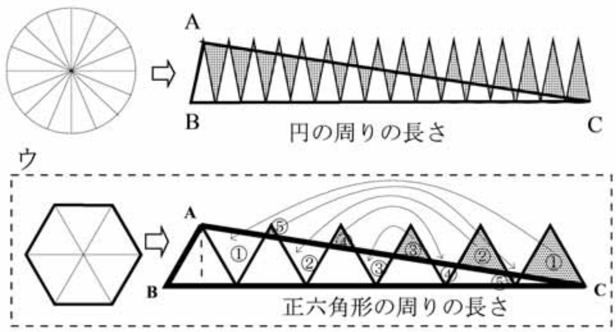

これは正六角形の面積の求め方の考え方（上図ア）が関連づけられた結果と言える。

上の円を64のおうぎ形に分割して図は、実際の操作で作図したり切ったりすることは困難であるが、ここでもPCを活用してアニメーションで示すことでおうぎ形を組み合わせて並べた形が長方形と考えても良いことが理解できる。このように視覚を通して納得することなくしては、ここでの学習の難しさの一つである曲線が直線に近づくという見方を理解することは期待できない。

次に二つ目は、直径で分割して出来た扇形を横一列に並べ、底辺に当たるところが円の周になるようにする考え方である。これも先に学習した正六角形の面積を求めるのに、頂点を移動させて大きな三角形に等積変形の考え方（右図イ）と関連づけた方法である。ここでも、正六角形の面積の求め方で学習したことが活用されていることになる。



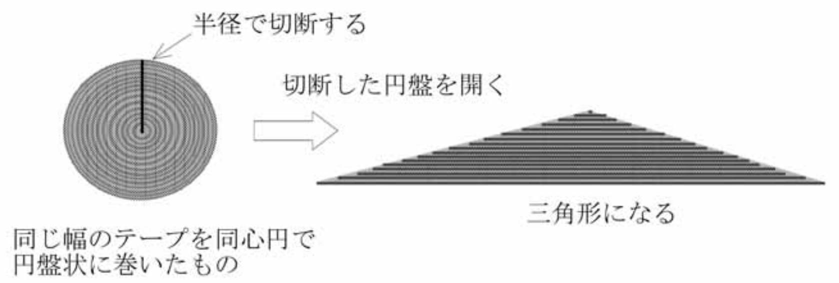

さらに、別な等積変形の考え方として、何とか三角形に変形してみることが出来ないだろうかという見通しをもとに、直線ACに対して対称な位置にある三角形に着目し、出っ張った部分を一つ一つ谷間に埋めて三角形に変形し




ていく方法がある。この考え方も正六角形で同じような考え方（右図ウ）をして求積することを経験していて初めて関連づけられる発想である。

以上取り上げた紹介した等積変形による円の面積の求め方は、以前の単元で正六角形の面積の求め方を学習したから必ず全てが子どもの側から出てくるというものではない。しかし、仮に出てこない場合であってもそれぞれの求め方が示された場合には、どのような考え方をしようとしているのかを容易に想起したり、なぜその方法で円の面積が求められるのかを筋道立てて説明したりすることは可能であると考えられる。このことは、思考力・判断力・表現力の育成に大きく関わることでもある。

また、取り上げた方法のほかに、次のように円盤状のテープなどを切り開いて三角形に変形する方法もあるが、正六角形で学習した方法と関連づけることは難しいとの考えから、ここでは扱わないことにした。




## 7. まとめ

ここでは、第６学年の「円の面積」の指導がより主体的な解決活動になることを狙って事前に「正六角形の面積」の指導を挿入することを提案した。しかし、形式的に「正六角形の面積」を扱っただけでは意味がなく、円につながるためには正六角形の指導に際して、どのような考え方をさせておくことが必要なのかをしっかり分析して指導にあたらなければならない。さらに、正六角形で育てておきたい考え方が明確になってくると、その前の三角形や台形などの指導においてどのような経験をさせておくことが正六角形の指導を充実したものにするのかを把握する必要がある。理由は、指導計画に正六角形を入れた場合とそうでない場合の三角形や台形などの指導は当然変わってくるからである。それだけに、徹底した教材研究は、十分な指導の成果を上げるためには欠くことの出来ない要件であり、子どもの主体的な活動は教師の地道な教材研究に支えられて初めて実現するものと言えるのである。

ここで紹介したように台形や円などの図形を三角形へ等積変形することを経験した子どもたちは、円の求積の方法を考え出す活動だけにとどまらず、どんな図形でも三角形に等積変形出来るのではないか、あるいは、全ての図形の面積は三角形の求積公式にまとめることが出来るのではないかと発展的に考え、抱いた疑問の解決に向けて積極的に取り組んでいこうとする。いわゆる自ら学ぶ姿勢を育てる観点からも正六角形を扱う指導に価値が見いだせるのである。

課題としては、提案では「正六角形の面積」を第５学年での指導としているが、果たして指導内容が大幅に増えた第５学年で指導するのが良いのか、年間の指導時数に影響を与えるのではないかといった事項があげられる。むしろ、第６学年の「円の面積」の前に指導する方がより良い成果に結びつくのではないかという観点から、指導の

時期については子どもの実態や各学年の指導時数も考慮しながら検討を加える必要があるところである。

《参考文献》

小学校学習指導要領解説　算数編　　文部科学省　　東洋館出版社