

ジニ係数の数理的性質と実証研究例

根 岸 章
Negishi Akira

1 はじめに

本論文の目的は、ジニ係数のある数理的性質、例えば、日本全体のジニ係数の変化の要因を調べるのに、地域別や年齢層別のジニ係数を調べることがどう関わってくるのかといったことを考察することにある。大竹文雄 (2006) は、「近年の日本のジニ係数の上昇は格差の大きい高齢者の比率の増加が主因である」と述べている。同様な主張は総理府統計局平成 14 年 8 月 2 日発表の「全国消費実態調査トピックスー日本の所得格差についてー」でも行われている。

「平成 11 年のジニ係数を年齢階級別にみますと、30 歳未満が 0.222, 30～49 歳が 0.235, 50～64 歳が 0.277, 65 歳以上が 0.308 と、年齢が高くなるほどジニ係数が高く、所得格差が大きいことがうかがえます。このことから、高齢化が全体の所得格差拡大に影響しているものと思われる。」

このような、社会集団が複数の階層に分かれている場合、ある階層の人数比や平均所得の変化が全体のジニ係数をどのように変化させるのかを分析するためのツールとして、逆累積度数分布関数とその分割、融合という概念を導入し、定理 2 においては、上記主張が一般論としては成り立たないことを見る。また、実証分析の例として、国民生活基礎調査のデータを用いた分析を行っている。この分析からは、ジニ係数の上昇に対して高齢者比率の増加が半分程度の影響があること、また、平均所得の変化もわずかではあるが影響を与えていることを見る。

先行研究として、浜田宏 (2005) は所得分布が「対数正規分布」に従うという仮定の下での分析を行っている。また、盛山和夫 (2006) は、一般的な分布の下で、各階層の平均所得が変化しない場合の考察を行っている。

本論文で用いた手法は、各階層の比率の変化のみでなく、平均の変化にも対応している点で、これら先行研究の結果を拡張した手法になっている。

2 ジニ係数の定義

本論文では、あるデータの分布に対し、その逆累積度数関数¹を定め、そこからジニ係数を以下のように定めていく²。これは、複数の集団のデータを一つにマージするために必要となるからである。

¹この関数の広い意味での逆関数が累積度数あるいは確率分布の分布関数を与える。このとき n は全度数、あるいは 1 となる。

²離散データや連続データに対しては通常の定義と同じ数値を与える定義である

定義 1 閉区間 $[0, n]$ 上で定義された有界・左連続・広義単調増加で $\varphi(0) = 0$ を満たす関数の集合を Φ_n とする。 Φ_n の要素 φ を逆累積度数関数と呼ぶことにする。

昇ベキの順に並べられた離散データの分布 ϕ

$$\phi: a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$

に対しては、

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\nu) = a_k \quad (k-1 < \nu \leq k, \quad k = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

とする。

逆累積度数関数 φ は次の性質を持つ。

補題 2.1 $\forall \varphi \in \Phi_n$ と $\forall \mu \geq 0$ に対し、ある $0 \leq \nu_{\mu, \varphi} \leq n$ が存在し、 $\varphi^{-1}([0, \mu]) = [0, \nu_{\mu, \varphi}]$ となる。また、 $\nu_{\mu, \varphi}$ は μ に関して広義単調増加であり、また $\varphi(\nu_{\mu, \varphi}) \leq \mu$ である。

証明： φ の単調性と $\varphi(0) = 0$ より、ある $0 \leq \nu_{\mu, \varphi} \leq n$ に対し、 $\varphi^{-1}([0, \mu]) = [0, \nu_{\mu, \varphi}]$ または $\varphi^{-1}([0, \mu]) = [0, \nu_{\mu, \varphi}]$ のどちらかが成り立つ。左連続性より、 $\nu \nearrow \nu_{\mu, \varphi}$ なら $\varphi(\nu) \leq \mu$ かつ $\varphi(\nu) \nearrow \varphi(\nu_{\mu, \varphi})$ が成り立つ。これより $\varphi(\nu_{\mu, \varphi}) \leq \mu$ となるので、 $\nu_{\mu, \varphi} \in \varphi^{-1}([0, \mu])$ が従う。 $\nu_{\mu, \varphi}$ の単調性は $\mu < \mu'$ なら $\varphi^{-1}([0, \mu]) \subset \varphi^{-1}([0, \mu'])$ となることより明らかであり、不等式は $\varphi(\nu_{\mu, \varphi}) \in \varphi([0, \nu_{\mu, \varphi}]) \subset [0, \mu]$ より導かれる。 \square

次に、逆累積度数関数 φ に対してローレンツ曲線の定義から、ジニ係数の定義までを与える。ジニ係数は φ の積分を使って表すことができる。

定義 2 $\varphi \in \Phi_n$ に対し、媒介変数 λ で表された曲線 $(x(\lambda), y(\lambda))$:

$$x(\lambda) = \frac{\lambda}{n}, \quad y(\lambda) = \int_0^\lambda \varphi(\nu) d\nu \Big/ \int_0^n \varphi(\nu) d\nu \quad (0 \leq \lambda \leq n) \quad (2)$$

を φ のローレンツ曲線という。ただし、 $y(\lambda)$ の分母が 0 になる $\varphi \in \Phi_n$ に対してはローレンツ曲線は考えない。

補題 2.2 ローレンツ曲線は次の性質を満たす。

- (i) 2 点 $O(0, 0)$, $I(1, 1)$ を通る。
- (ii) 広義単調増加な連続関数 $y = L_\varphi(x)$ のグラフとなる。
- (iii) $L_\varphi(x)$ は下に凸である。

証明： (i) $x(0) = y(0) = 0$, $x(n) = y(n) = 1$ は定義より明らか。

(ii) (2) 式より $\lambda = nx$ となるので、これを y の定義式に代入して

$$y = L_\varphi(x) = \int_0^{nx} \varphi(\nu) d\nu \Big/ \int_0^n \varphi(\nu) d\nu \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (3)$$

となる。 $\varphi \geq 0$ より単調性が従う。

(iii) $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ を任意に固定する。このとき $L_\varphi(x_1) + L_\varphi(x_2) - 2L_\varphi((x_1 + x_2)/2) \geq 0$ を示せばよい。
分母は一定なので左辺に $\int_0^n \varphi(\nu) d\nu$ をかけて

$$\int_0^{nx_1} \varphi(\nu) d\nu + \int_0^{nx_2} \varphi(\nu) d\nu - 2 \int_0^{n(x_1+x_2)/2} \varphi(\nu) d\nu = \int_{n(x_1+x_2)/2}^{nx_2} \varphi(\nu) d\nu - \int_{nx_1}^{n(x_1+x_2)/2} \varphi(\nu) d\nu$$

右辺は2つの積分の積分区間の長さが等しく、また、 φ の単調性より非負である。 \square

定義 3 $\varphi \in \Phi_n$ のジニ係数 $G(\varphi)$ を

$$G(\varphi) := 2 \int_0^1 (x - L_\varphi(x)) dx \quad (4)$$

とする。

定理 1

$$G(\varphi) = \frac{2Z_\varphi}{nY_\varphi} - 1 \quad (5)$$

となる。ただし

$$Y_\varphi = \int_0^n \varphi(\nu) d\nu, \quad Z_\varphi = \int_0^n \nu \varphi(\nu) d\nu \quad (6)$$

である。

証明： (3), (4), (6) 式より

$$G_\varphi = 1 - \frac{2}{Y_\varphi} \int_0^1 \left(\int_0^{nx} \varphi(\nu) d\nu \right) dx$$

右辺の積分は $[0, 1] \times [0, n]$ で絶対収束するので積分順序が交換できて

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{2}{Y_\varphi} \int_0^n \left(\int_{\nu/n}^1 \varphi(\nu) dx \right) d\nu = 1 - \frac{2}{Y_\varphi} \int_0^n \left(1 - \frac{\nu}{n} \right) \varphi(\nu) d\nu \\ &= 1 - \frac{2}{Y_\varphi} \int_0^n \varphi(\nu) d\nu + \frac{2}{nY_\varphi} \int_0^n \nu \varphi(\nu) d\nu = 1 - 2 + \frac{2Z_\varphi}{nY_\varphi} = \frac{2Z_\varphi}{nY_\varphi} - 1 \end{aligned}$$

\square

ここから、集団の大きさの変化に対応する演算 $N(c)$ と集団の平均の変化に対応する $A(c)$ を導入する。

定義 4

(i) $c > 0$ に対し、 $N(c) : \Phi_n \longrightarrow \Phi_{cn}$ で、

$$(N(c) \circ \varphi)(\nu) := \varphi(\nu/c)$$

とする。

(ii) $c > 0$ に対し、 $A(c) : \Phi_n \rightarrow \Phi_n$ で

$$(A(c) \circ \varphi)(\nu) := c\varphi(\nu)$$

とする。

これらの演算は、次の性質を持つ。

補題 2.3 $\varphi \in \Phi_n$ と $c > 0$ に対し $\varphi_c = N(c) \circ \varphi$, $\varphi^c = A(c) \circ \varphi$ とすると

$$(i) \quad Y_{\varphi_c} = Y_{\varphi^c} = cY_\varphi$$

$$(ii) \quad Z_{\varphi_c} = cZ_{\varphi^c} = c^2Z_\varphi$$

$$(iii) \quad G(\varphi_c) = G(\varphi^c) = G(\varphi)$$

証明： (i)

$$\begin{aligned} Y_{\varphi_c} &= \int_0^{cn} \varphi_c(\nu) d\nu = \int_0^n \varphi_c(c\nu') c d\nu' = c \int_0^n \varphi(\nu') d\nu' = cY_\varphi \\ Y_{\varphi^c} &= \int_0^n \varphi^c(\nu) d\nu = \int_0^n c\varphi(\nu) d\nu = cY_\varphi \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} Z_{\varphi_c} &= \int_0^{cn} \nu \varphi_c(\nu) d\nu = \int_0^n c\nu' \varphi_c(c\nu') c d\nu' = c^2 \int_0^n \nu' \varphi(\nu') d\nu' = c^2 Z_\varphi \\ Z_{\varphi^c} &= \int_0^n \nu \varphi^c(\nu) d\nu = \int_0^n \nu c\varphi(\nu) d\nu = cZ_\varphi \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} G_{\varphi_c} &= \frac{2Z_{\varphi_c}}{cnY_{\varphi_c}} - 1 = \frac{2c^2Z_\varphi}{cncY_\varphi} - 1 = \frac{2Z_\varphi}{nY_\varphi} - 1 = G(\varphi) \\ G_{\varphi^c} &= \frac{2Z_{\varphi^c}}{nY_{\varphi^c}} - 1 = \frac{2cZ_\varphi}{ncY_\varphi} - 1 = \frac{2Z_\varphi}{nY_\varphi} - 1 = G(\varphi) \end{aligned}$$

□

定義 5 $\forall n > 0$, $\forall \varphi \in \Phi_n$ ($Y_\varphi \neq 0$) に対し、 $\varphi' = \left(A\left(\frac{n}{Y_\varphi}\right) \circ N\left(\frac{1}{n}\right) \circ \varphi\right)(\nu)$ とすると $\varphi' \in \Phi_1$, かつ $Y_{\varphi'} = 1$ となる。これを φ の正規化と呼ぶ。正規化された $\varphi \in \Phi_1$ に対しては、 $G(\varphi) = 2Z_\varphi - 1$ となる。

3 φ の制限・分割

この節では、逆累積度数関数 φ をある部分集合へ制限したり、分割したりする操作を見る。これは、全体から 1 部の集団を取り出したり、2 つの集団に分ける操作に相当する。

定義 6 $\varphi \in \Phi_n$ と、区間 $[0, n]$ の可測部分集合 A ($m(A) = n' \leq n$, $m(\cdot)$ は \mathbf{R} の Lebesgue 測度) に対し、 $\varphi_A \in \Phi_{n'}$ を次のように定める。

$$\varphi_A(\nu) = \varphi(\min\{\xi \mid m([0, \xi] \cap A) = \nu\})$$

φ_A を φ の A への制限と呼ぶ。

$\varphi_A \in \Phi_{n'}$ であることを以下に示す。

まず、

$$f_A(\xi) := m([0, \xi] \cap A) \quad (7)$$

とする。 f_A は明らかに $[0, n]$ 上で広義単調な連続関数となる。 $0 \leq \nu \leq n'$ のとき f_A の逆像 $f_A^{-1}(\{\nu\})$ は $[0, n]$ 内の閉区間（または1点）となるので、最小値が存在する。対応 $\nu \rightarrow \min(f_A^{-1}(\{\nu\}))$ を改めて f_A^{-1} と表すことにすると、

$$\varphi_A(\nu) = (\varphi \circ f_A^{-1})(\nu) \quad (8)$$

である。

この、 f_A, f_A^{-1} に対し、次の補題が成り立つ。

補題 3.1

$$(i) (f_A \circ f_A^{-1})(\nu) = \nu$$

$$(ii) f_A^{-1} \text{ は左連続・狭義単調増加である。}$$

証明：(i) 定義より $\xi = f_A^{-1}(\nu)$ は $f_A(\xi) = \nu$ を満たす。

(ii) $\nu_1 < \nu_2$, $\xi_1 = f_A^{-1}(\nu_1)$, $\xi_2 = f_A^{-1}(\nu_2)$ とすると、(i) より $f_A(\xi_1) = \nu_1 < \nu_2 = f_A(\xi_2)$ となるので、 f_A の単調性より $\xi_1 < \xi_2$ となる。次に左連続を示す。 $\xi = f_A^{-1}(\nu)$ とする。 f_A^{-1} の定義（最小性）より、 $\xi' < \xi$ なら $f_A(\xi') < f_A(\xi)$ となる。 $\forall \varepsilon > 0$ に対し、 $\xi - \xi' = \varepsilon$ なる ξ' をとり、 $\nu' = f_A(\xi')$ とする。 $\nu' < \forall \nu'' < \nu$ に対し、(i) より $f_A(\xi') < (f_A \circ f_A^{-1})(\nu'') < f_A(\xi)$ となり、これと f_A の単調性より $\xi' < f_A^{-1}(\nu'') < \xi$ となる。よって、このとき $f_A^{-1}(\nu) - f_A^{-1}(\nu'') < \xi - \xi' = \varepsilon$ となる。□

単調性も左連続性も関数の合成によって保存される。よって、 $\varphi_A = \varphi \circ f_A^{-1} \in \Phi_{n'}$ となる。

次に、 φ と φ_A の関係を見る。

補題 3.2 $\varphi \in \Phi_n$ と $[0, n]$ の可測部分集合 A ($m(A) = n'$) に対し

$$(i) \varphi_A(\nu) \geq \varphi(\nu) \quad (0 \leq \nu \leq n')$$

$$(ii) \varphi_A(\nu - n + n') \leq \varphi(\nu) \quad (n - n' \leq \nu \leq n)$$

$$(iii) 0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \implies m(\varphi_A^{-1}((\mu_1, \mu_2])) = m(\varphi^{-1}((\mu_1, \mu_2]) \cap A)$$

証明：(i) (7) 式より $f_A(\xi) \leq \xi$ は常に成り立つので、この不等式で $\xi = f_A^{-1}(\nu)$ と置いて両辺を φ に代入すれば良い。

(ii) $[0, n] - [0, \xi] = (\xi, n]$ なので、左辺の A との合併集合を考えて測度をとると $n' - f_A(\xi) \leq n - \xi$ が出る。この式で $\xi = f_A^{-1}(\nu - n + n')$ と置いて両辺を φ に代入すれば良い。

(iii) 補題 2.1 より $\varphi^{-1}((\mu_1, \mu_2]) = (\nu_1, \nu_2]$ なる ν_1, ν_2 が存在する。よって右辺は $m((\nu_1, \nu_2] \cap A)$ に等しい。左辺のカッコ内の集合は

$$\nu \in \varphi_A^{-1}((\mu_1, \mu_2]) \Leftrightarrow \nu_1 < f_A^{-1}(\nu) \leq \nu_2 \Leftrightarrow f_A(\nu_1) < \nu \leq f_A(\nu_2) \Leftrightarrow m([0, \nu_1] \cap A) < \nu \leq m([0, \nu_2] \cap A)$$

となる。1 つ目の変形は $\varphi_A = \varphi \circ f_A^{-1}$ より、2 つ目の変形は補題 3.1(i) より、3 つ目の変形は f_A の定義 (7) 式より従う。最右辺を満たす ν の集合の測度は $m([0, \nu_2] \cap A) - m([0, \nu_1] \cap A) = m((\nu_1, \nu_2] \cap A)$ となるので、与式で左辺 = 右辺 となる。 \square

系 φ と φ_A に対し、次の式が成り立つ。

(i)

$$\int_0^{n'} \varphi_A(\nu) d\nu = \int_{[0, n] \cap A} \varphi(\nu) d\nu$$

(ii)

$$\int_0^{n'} \nu \varphi_A(\nu) d\nu \leq \int_{[0, n] \cap A} \nu \varphi(\nu) d\nu$$

(iii)

$$\int_{[0, n] \cap A} \nu \varphi(\nu) d\nu \leq \int_0^{n'} (\nu + n - n') \varphi_A(\nu) d\nu \leq \int_0^n \nu \varphi(\nu) d\nu$$

証明：(i) 補題 3.2(iii) と Lebesgue 積分の定義（階段関数の近似の極限）より従う。

(ii) 補題 3.2(i) より、 $\varphi_A(\nu_1) = \varphi(\nu_2)$ なら $\nu_1 \leq \nu_2$ となる。したがって、このとき $\nu_1 \varphi_A(\nu_1) \leq \nu_2 \varphi(\nu_2)$ が成り立つ。(i) と同様に φ_A と φ を階段関数で近似して極限を考えれば与式が示せる。

(iii) 補題 3.2(ii) に ν を掛け両辺を $[n - n', n]$ で積分したものより右側の不等式が示せる。同じく (ii) より、 $\varphi_A(\nu_1) = \varphi(\nu_2)$ なら $\nu_1 \geq \nu_2 - n + n'$ となる。したがって、このとき

$(\nu_1 + n - n') \varphi_A(\nu_1) \geq \nu_2 \varphi(\nu_2)$ が成り立つ。(ii) と同様に与式が示せる。 \square

定義 7 区間 $[0, n]$ の 2 つの可測部分集合 A_1, A_2 ($m(A_1) = n_1, m(A_2) = n_2$) が $A_2 := [0, n] \setminus A_1, n_1 + n_2 = n$ を満たすとき、 A_1, A_2 を $[0, n]$ の分割と呼ぶ。さらに、 $\varphi \in \Phi_n$ の A_1, A_2 への制限をそれぞれ $\varphi_1 = \varphi_{A_1}, \varphi_2 = \varphi_{A_2}$ としたとき、 φ_1, φ_2 を φ の分割と呼ぶ。

補題 3.3 $\varphi \in \Phi_n$ の分割を $\varphi_1 \in \Phi_{n_1}, \varphi_2 \in \Phi_{n_2}$ とする。このとき

$$(i) Y_\varphi = Y_{\varphi_1} + Y_{\varphi_2}$$

$$(ii) \max(Z_{\varphi_1} + Z_{\varphi_2}, Z_{\varphi_1} + n_2 Y_{\varphi_1}, Z_{\varphi_2} + n_1 Y_{\varphi_2}) \leq Z_\varphi \leq Z_{\varphi_1} + Z_{\varphi_2} + n_2 Y_{\varphi_1} + n_1 Y_{\varphi_2}$$

が成り立つ。

証明：(i) 補題 3.2 の系 (i) を用いると

$$Y_\varphi = \int_0^n \varphi(\nu) d\nu = \int_{[0, n] \cap A_1} \varphi(\nu) d\nu + \int_{[0, n] \cap A_2} \varphi(\nu) d\nu = \int_0^{n_1} \varphi_1(\nu) d\nu + \int_0^{n_2} \varphi_2(\nu) d\nu = Y_{\varphi_1} + Y_{\varphi_2}$$

(ii) 補題 3.2 の系 (ii) より

$$Z_\varphi = \int_0^n \nu \varphi(\nu) d\nu = \int_{[0,n] \cap A_1} \nu \varphi(\nu) d\nu + \int_{[0,n] \cap A_2} \nu \varphi(\nu) d\nu \geq \int_0^{n_1} \nu \varphi_1(\nu) d\nu + \int_0^{n_2} \nu \varphi_2(\nu) d\nu = Z_{\varphi_1} + Z_{\varphi_2}$$

補題 3.2 の系 (iii) の右側の不等式より

$$Z_\varphi = \int_0^n \nu \varphi(\nu) d\nu \geq \int_0^{n_1} (\nu + n_2) \varphi_1(\nu) d\nu \geq \int_0^{n_1} \nu \varphi_1(\nu) d\nu + n_2 \int_0^{n_1} \varphi_1(\nu) d\nu \geq Z_{\varphi_1} + n_2 Y_{\varphi_1}$$

となる。 $Z_\varphi \geq Z_{\varphi_2} + n_1 Y_{\varphi_2}$ も同様に示せる。補題 3.2 の系 (iii) の左側の不等式より

$$\begin{aligned} Z_\varphi &= \int_{[0,n] \cap A_1} \nu \varphi(\nu) d\nu + \int_{[0,n] \cap A_2} \nu \varphi(\nu) d\nu \leq \int_0^{n_1} (\nu + n_2) \varphi_1(\nu) d\nu + \int_0^{n_2} (\nu + n_1) \varphi_2(\nu) d\nu \\ &= \int_0^{n_1} \nu \varphi_1(\nu) d\nu + n_2 \int_0^{n_1} \varphi_1(\nu) d\nu + \int_0^{n_2} \nu \varphi_2(\nu) d\nu + n_1 \int_0^{n_2} \varphi_2(\nu) d\nu \\ &= Z_{\varphi_1} + Z_{\varphi_2} + n_2 Y_{\varphi_1} + n_1 Y_{\varphi_2} \end{aligned}$$

□

4 φ の融合

この節では、2つの逆累積度数関数を合わせる操作を見る。これは、2つの集団を合わせて1つの集団にする操作に相当する。

定義 8 $\varphi_1 \in \Phi_{n_1}$, $\varphi_2 \in \Phi_{n_2}$ に対し、 $\varphi_1 \oplus \varphi_2 \in \Phi_n$ ($n = n_1 + n_2$) を次のように定める。

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(\nu) := \begin{cases} 0 & (\nu = 0) \\ \sup(\{\mu \mid m(\{\nu' \mid \varphi_1(\nu') \leq \mu\}) + m(\{\nu' \mid \varphi_2(\nu') \leq \mu\}) < \nu\}) & (\nu > 0) \end{cases}$$

ただし、変数は全て $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ 内で考え、 $\sup \emptyset = 0$ とする。この $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ を φ_1 と φ_2 の融合と呼ぶ。

$\varphi_1 \oplus \varphi_2 \in \Phi_n$ を示す。

$$g(\mu) = m(\{\nu \mid \varphi_1(\nu) \leq \mu\}) + m(\{\nu \mid \varphi_2(\nu) \leq \mu\}) \quad (9)$$

とする。 g は非負広義単調増加である。 $\nu > 0$ に対し

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(\nu) = \sup(\{\mu \mid g(\mu) < \nu\}) \quad (10)$$

とすると、 $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ は広義単調・左連続となる。単調性は $I_\nu = \{\mu \mid g(\mu) < \nu\}$ とすると、集合の包含関係 $\nu' < \nu \Rightarrow I_{\nu'} \subset I_\nu$ より明らかである。左連続性を示す。 g の単調性より、 I_ν は左端点を 0 とする有界区間 (または空集合) になるので、上限は必ず存在する。 $\forall \nu > 0$ を固定すると、 $I_{\nu'} \nearrow I_\nu$ ($\nu' \nearrow \nu$) が成り立つ (i.e. $\forall \mu \in I_\nu$, $\exists \nu' < \nu$ s.t. $\mu \in I_{\nu'}$) ことがわかる。これより $\sup(I_{\nu'}) \nearrow \sup(I_\nu)$ ($\nu' \nearrow \nu$) が従う。

補題 4.1 $\varphi \in \Phi_n$ と $[0, n]$ の分割 A_1, A_2 に対し、

$$\varphi_{A_1} \oplus \varphi_{A_2} = \varphi$$

が成り立つ。

証明： $\varphi_{A_1} = \varphi_1, \varphi_{A_2} = \varphi_2$ と略記する。任意の $\nu_0 > 0$ に対し、 $\mu_0 = (\varphi_1 \oplus \varphi_2)(\nu_0)$ とおいて、 $\mu_0 = \varphi(\nu_0)$ を示す。

(10) 式より、

$$\mu_0 = \sup\{\mu \mid g(\mu) < \nu_0\} \quad (11)$$

となり、さらに (9) 式より (11) 式の右辺の集合は、

$$m(\{\nu \mid \varphi_1(\nu) \leq \mu\}) + m(\{\nu \mid \varphi_2(\nu) \leq \mu\}) < \nu_0 \quad (12)$$

を満たす $\mu \geq 0$ の集合である。(12) 式の左辺は (8) と補題 2.1 を用いて、

$$m(\{\nu \mid f_{A_1}^{-1}(\nu) \leq \nu_{\mu, \varphi}\}) + m(\{\nu \mid f_{A_2}^{-1}(\nu) \leq \nu_{\mu, \varphi}\})$$

となり、これに補題 3.1 と (7) 式を適用すると

$$\begin{aligned} m(\{\nu \mid \nu \leq f_{A_1}(\nu_{\mu, \varphi})\}) + m(\{\nu \mid \nu \leq f_{A_2}(\nu_{\mu, \varphi})\}) &= f_{A_1}(\nu_{\mu, \varphi}) + f_{A_2}(\nu_{\mu, \varphi}) \\ &= m([0, \nu_{\mu, \varphi}] \cap A_1) + m([0, \nu_{\mu, \varphi}] \cap A_2) = m([0, \nu_{\mu, \varphi}] \cap (A_1 \cup A_2)) \\ &= m([0, \nu_{\mu, \varphi}] \cap [0, n]) = m([0, \nu_{\mu, \varphi}]) = \nu_{\mu, \varphi} \end{aligned}$$

となる。これより (12) 式は $\nu_{\mu, \varphi} < \nu_0$ となるので、(11) 式に代入して

$$\mu_0 = \sup\{\mu \mid \nu_{\mu, \varphi} < \nu_0\} \quad (13)$$

となる。ここで $\mu_0 > \varphi(\nu_0)$ と仮定すると、 $\mu_0 > \exists \mu_1 > \varphi(\nu_0)$ なる μ_1 は μ_0 が (13) 式で上限であることより $\nu_{\mu_1, \varphi} < \nu_0$ を満たし、 $\varphi(\nu_0) \in [0, \mu_1]$ より $\nu_0 \in [0, \nu_{\mu_1, \varphi}]$ すなわち $\nu_0 \leq \nu_{\mu_1, \varphi}$ となるので矛盾する。よって、 $\mu_0 \leq \varphi(\nu_0)$ である。 $\mu_0 < \varphi(\nu_0)$ と仮定すると、 $\mu_0 < \exists \mu_2 < \varphi(\nu_0)$ なる μ_2 は μ_0 が (13) 式で上限であることより $\nu_{\mu_2, \varphi} \geq \nu_0$ を満たすが、 φ の単調性と補題 2.1 の不等式より $\varphi(\nu_0) \leq \varphi(\nu_{\mu_2, \varphi}) \leq \mu_2$ となり矛盾する。よって、 $\mu_0 = \varphi(\nu_0)$ が成り立つ。 \square

系 補題 3.3 で φ を $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ に置き換えた不等式が全て成り立つ。

5 数理的性質の主結果

2つの集団のジニ係数が、それを合わせた集団のジニ係数にどのように影響するかを見るのに、次の定理を示す。これは、2つの集団を融合する際に、2つのパラメータ s, t を s は比率の変更、 t は集団の平均の相対的な差を変更するように導入するものである。

定理 2 $\varphi_1 \in \Phi_{n_1}$, $\varphi_2 \in \Phi_{n_2}$ を任意に取り、 $G_1 = G(\varphi_1)$, $G_2 = G(\varphi_2)$ とする。 $s, t > 0$ に対し、 $\varphi_{s,t} := (N(s) \circ \varphi_1) \oplus (A(t) \circ \varphi_2) \in \Phi_{sn_1+n_2}$ とし、 $G(s, t) := G(\varphi_{s,t})$ とする。このとき

(i)

$$\lim_{s \nearrow \infty} G(s, t) = G_1$$

(ii)

$$\lim_{s \searrow 0} G(s, t) = G_2$$

(iii)

$$\lim_{t \nearrow \infty} G(s, t) = \frac{s + G_2}{s + 1}$$

(iv)

$$\lim_{t \searrow 0} G(s, t) = \frac{sG_1 + 1}{s + 1}$$

が成り立つ。

証明： φ_1, φ_2 は正規化されているとして、一般性を失わない。このとき $\varphi_{s,t} \in \Phi_{s+1}$ である。補題 2.3 と補題 4.1 の系より

$$Y_{\varphi_{s,t}} = Y_{(N(s) \circ \varphi_1)} + Y_{(A(t) \circ \varphi_2)} = sY_{\varphi_1} + tY_{\varphi_2} = s + t \quad (14)$$

が成り立つ。同様に、

$$\max(s^2 Z_{\varphi_1} + t Z_{\varphi_2}, s^2 Z_{\varphi_1} + s, t Z_{\varphi_2} + st) \leq Z_{\varphi} \leq s^2 Z_{\varphi_1} + t Z_{\varphi_2} + s + st \quad (15)$$

これらを定理 1 に適用して、まず

$$\frac{2(s^2 Z_{\varphi_1} + t Z_{\varphi_2})}{(s+1)(s+t)} - 1 \leq G(s, t) \leq \frac{2(s^2 Z_{\varphi_1} + t Z_{\varphi_2} + s + st)}{(s+1)(s+t)} - 1 \quad (16)$$

となる。ここで $s \nearrow \infty$ とすると、(16) の不等式の両端は $2Z_{\varphi_1} - 1 = G_1$ に近づくので、(i) が示せる。また、 $s \searrow 0$ とすると、(16) の不等式の両端は $2Z_{\varphi_2} - 1 = G_2$ に近づくので、(ii) が示せる。同様に、定理 1 と (14), (15) 式より

$$\frac{2(t Z_{\varphi_2} + st)}{(s+1)(s+t)} - 1 \leq G(s, t) \leq \frac{2(s^2 Z_{\varphi_1} + t Z_{\varphi_2} + s + st)}{(s+1)(s+t)} - 1 \quad (17)$$

となる。 $t \nearrow \infty$ とすると (17) の両端は $\frac{2(Z_{\varphi_2} + s)}{s+1} - 1 = \frac{s+G_2}{s+1}$ に近づくので (iii) が示せる。さらに

$$\frac{2(s^2 Z_{\varphi_1} + s)}{(s+1)(s+t)} - 1 \leq G(s, t) \leq \frac{2(s^2 Z_{\varphi_1} + t Z_{\varphi_2} + s + st)}{(s+1)(s+t)} - 1 \quad (18)$$

において、 $t \searrow 0$ とすると両端は $\frac{2(s Z_{\varphi_2} + 1)}{s+1} - 1 = \frac{sG_1 + 1}{s+1}$ に近づくので (iv) が示せる。 \square

系 1 $\forall G_1, G_2 \in [0, 1)$ に対し $G_j = G(\varphi_j)$ ($j = 1, 2$) を満たし $G(\varphi_1 \oplus \varphi_2)$ がいくらでも 1 に近いものが存在する。

証明： $\lim_{s \nearrow \infty} \frac{s+G_2}{s+1} = 1$ あるいは $\lim_{s \searrow 0} \frac{sG_1+1}{s+1} = 1$ より明らか。 \square

系 2 $0 \leq G_2 < G_1 < 1$ とする。このとき、定理の条件を満たす任意の φ_1, φ_2 に対し、ある $t > 0$ が存在し $0 < s_1 < s_2 < s_3$ で $G(s_1, t) < G(s_2, t)$, $G(s_2, t) > G(s_3, t)$ が成り立つような s_1, s_2, s_3 がとれる。

証明：系 1 より、適当な (s, t) をとって、 $G_1 < G(s, t) < 1$ とできる。この s を s_2 として、 t を固定して $s \searrow 0$ とすれば $G(s, t) \rightarrow G_2 < G_1 < G(s_2, t)$ となるので、 $G(s_1, t) < G(s_2, t)$ となる $s_1 < s_2$ がとれる。一方、 $s \nearrow \infty$ とすれば $G(s, t) \rightarrow G_1 < G(s_2, t)$ となるので、 $G(s_3, t) < G(s_2, t)$ となる $s_3 > s_2$ がとれる。□

系 2 より、ジニ係数の高い集団 G_1 とジニ係数の低い集団 G_2 が存在しているとして、 G_1 の比率が上昇しても (s が増加しても) 全体のジニ係数が増加するとは限らないことが示された。

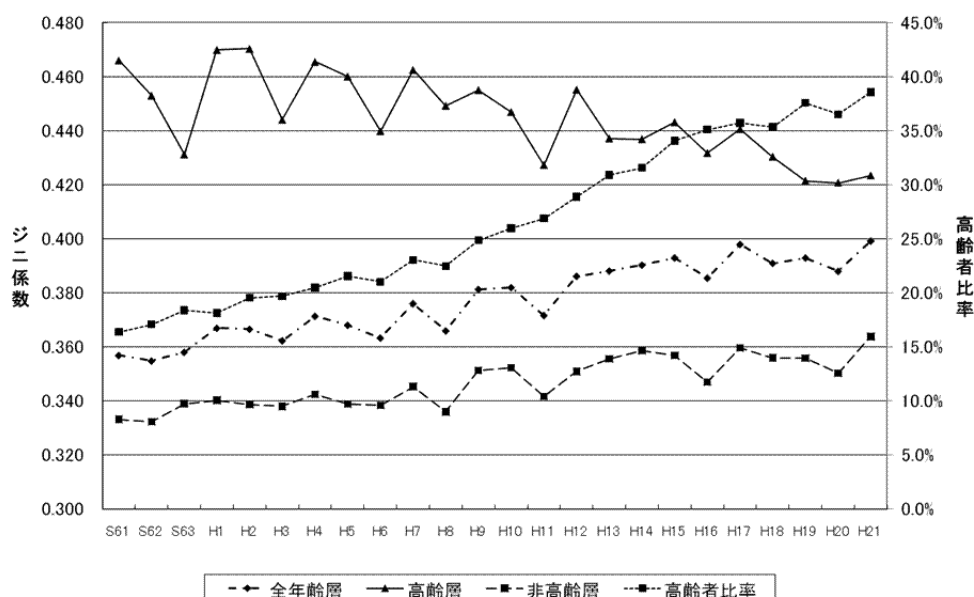
6 実証例 1: 高齢化要因

ここでは、厚生労働省が実施、発表している国民生活基礎調査のデータをもとにした分析を試みる。初めに、このデータは大きさ 6 千から 1 万程度の標本調査であり、日本全体のジニ係数を忠実に反映しているとは言い難いことを断っておく。

用いたデータは、昭和 61 年から平成 21 年までの国民生活基礎調査のタイトル「世帯数、世帯主の年齢（10 歳階級）・世帯構造・所得金額階級別」の表³に基づいている。このデータで 65 歳以上を高齢者層、65 歳未満を非高齢者層として分析を行う。また、ジニ係数の算出に当たっては、度数分布表の階級値として中央値を用いている。ただし、2000 万円以上の所得層に関しては、中央値が存在しないので 2000 万円を階級値として用いている。このため、ジニ係数としては実態より小さめの数字が出てきている可能性が高い。

まず、2 つの年齢層と全年齢層のジニ係数を昭和 61 年から平成 21 年まで計算し、これと、高齢者比率の関係をグラフにしたものが図 1 である。

図 1: ジニ係数と高齢者比率の推移



³年によって表番号は異なるが平成 21 年版では第 027 表である

	全年齢層	高齢層	非高齢層
5 0 万円未満	0.31392	0.17254	0.14138
5 0 ～ 1 0 0 万円未満	0.92180	0.48603	0.43576
1 0 0 ～ 1 5 0	1.31326	0.59936	0.71391
1 5 0 ～ 2 0 0	1.31576	0.58539	0.73038
2 0 0 ～ 2 5 0	1.39575	0.54333	0.85242
2 5 0 ～ 3 0 0	1.34305	0.51231	0.83074
3 0 0 ～ 3 5 0	1.52372	0.50310	1.02062
3 5 0 ～ 4 0 0	1.42874	0.42248	1.00627
4 0 0 ～ 4 5 0	1.41606	0.33003	1.08602
4 5 0 ～ 5 0 0	1.26057	0.25590	1.00467
5 0 0 ～ 5 5 0	1.28621	0.22860	1.05761
5 5 0 ～ 6 0 0	1.07767	0.19216	0.88552
6 0 0 ～ 6 5 0	1.09329	0.16794	0.92536
6 5 0 ～ 7 0 0	0.91068	0.14737	0.76331
7 0 0 ～ 7 5 0	0.88629	0.14347	0.74282
7 5 0 ～ 8 0 0	0.74070	0.11824	0.62245
8 0 0 ～ 8 5 0	0.74085	0.10821	0.63264
8 5 0 ～ 9 0 0	0.59888	0.09556	0.50331
9 0 0 ～ 9 5 0	0.55626	0.08622	0.47004
9 5 0 ～ 1 0 0 0	0.46403	0.07282	0.39122
1 0 0 0 ～ 1 1 0 0	0.81169	0.12260	0.68909
1 1 0 0 ～ 1 2 0 0	0.57731	0.10193	0.47537
1 2 0 0 ～ 1 5 0 0	1.05312	0.18305	0.87007
1 5 0 0 ～ 2 0 0 0	0.60690	0.12207	0.48484
2 0 0 0 万円以上	0.36347	0.09793	0.26554
合計	24	6.39866	17.60134

表 1: 基準となる度数分布

この図からは、確かに高齢者比率の増大と全年齢層のジニ係数の増加の相関が読み取れるが、それよりも、非高齢層との相関の方が大きいように見える。

そこで、高齢者比率以外の要因を排除し、高齢者比率のみの変化によってジニ係数がどのように変化するかを見ることにする。このために 24 年分のデータの融合を行う。昭和 61 年から平成 21 年までの度数分布表で決まる逆累積度数関数をそれぞれ $\varphi_{S61}, \varphi_{S62}, \dots, \varphi_{H21}$ とする。ただし、それぞれ $n = 1$ となるように規格化し、 Φ_1 の要素であるとする⁴。そこで

$$\bar{\varphi} = \varphi_{S61} \oplus \varphi_{S62} \oplus \dots \oplus \varphi_{H21}$$

とし、これを基準の分布とする。

$\bar{\varphi} \in \Phi_{24}$ であり、高齢者比率 $p = 0.2666$ に対し、

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 \oplus \bar{\varphi}_2 \quad (\bar{\varphi}_1 \in \Phi_{24p}, \bar{\varphi}_2 \in \Phi_{24(1-p)})$$

と分割される。 $\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$ を度数分布表で表したものが表 1 である。この度数分布表は、各年次の全年齢層の全度数に対する相対度数を足したものに他ならない。

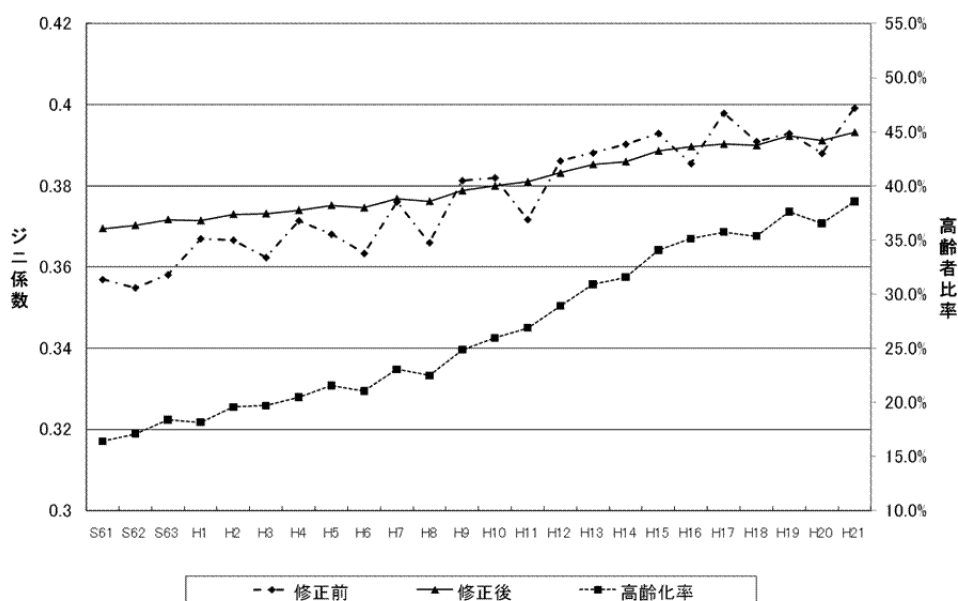
⁴標本の大きさによる影響を排除するためである。この間の総人口の変化は大きくないので無視する。

この表からジニ係数を計算すると 0.3808 となっている。さて、 y 年の高齢者比率 p_y に対し

$$\bar{\varphi}_y = \left(N \left(\frac{p_y}{p} \right) \circ \bar{\varphi}_1 \right) \oplus \left(N \left(\frac{1-p_y}{1-p} \right) \circ \bar{\varphi}_2 \right) = \bar{\varphi}_{1y} \oplus \bar{\varphi}_{2y}$$

とすると、 $\bar{\varphi}_y \in \Phi_{24}$, $\bar{\varphi}_{1y} \in \Phi_{24p_y}$, $\bar{\varphi}_{2y} \in \Phi_{24(1-p_y)}$ となる。これは、 $\bar{\varphi}$ の分布から、高齢者比率のみ y 年に等しい分布を作ったことに相当する。 y を S61 から H21 までとって、24 の分布を作り、各年次の全年齢層のジニ係数を計算し、それをグラフにしたものが図 2 である。

図 2: 修正されたジニ係数と高齢者比率の推移



この図からは、本来のジニ係数ほどではないにしろ、高齢者比率のみに修正したジニ係数も、高齢者比率の増加によって、値が増加していることがわかる。昭和 61 年のジニ係数がそれぞれ 0.3570, 0.3695 に対し、平成 21 年では 0.3992, 0.3933 となるので、ジニ係数の上昇に占める割合は

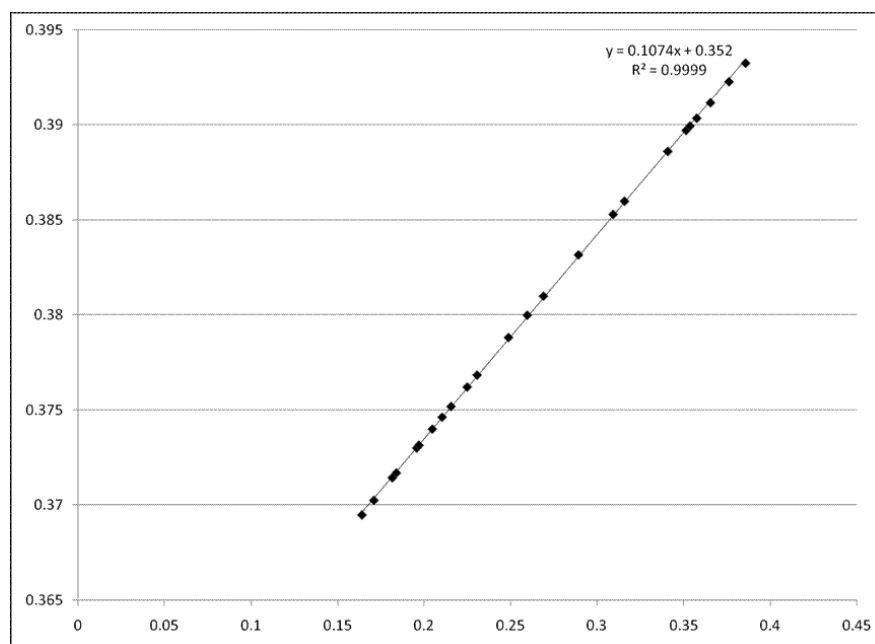
$$\frac{0.3933 - 0.3695}{0.3992 - 0.3570} = 0.564$$

となり、増加原因の半分を超えていることがわかる。

高齢者比率が修正されたジニ係数に及ぼす影響を見るために、この 2 つを散布図にしたのが図 3 である。

高齢者比率と修正されたジニ係数の相関係数は 0.9999、回帰直線の方程式は $g = 0.1074r + 0.352$ (g はジニ係数、 r は高齢者比率) となる。このことから、高齢化によって、全体のジニ係数が 0.02 以上押し上げられていることが理解される。ただし、図 1 から、近年、高齢層のジニ係数は減少傾向にあり、非高齢層との差は縮まってきているので、今後は高齢化による要因は減少してくるものと思われる。

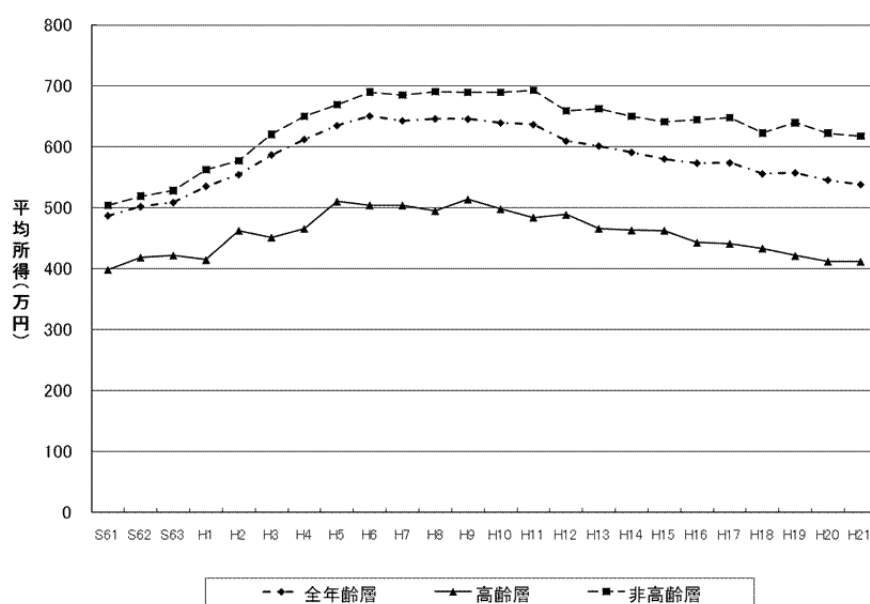
図 3: 高齢者比率と修正されたジニ係数の相関



7 実証例 2: 平均所得要因

次に、平均所得の変化がジニ係数に与える影響を見てみよう。まず、各年齢層の平均所得を度数分布表から算出した。この場合も階級値は前節と同様に取っているので、平均所得は小さめの値が出る可能性が高くなっている。これをグラフにしたものが図 4 である。

図 4: 平均所得の推移



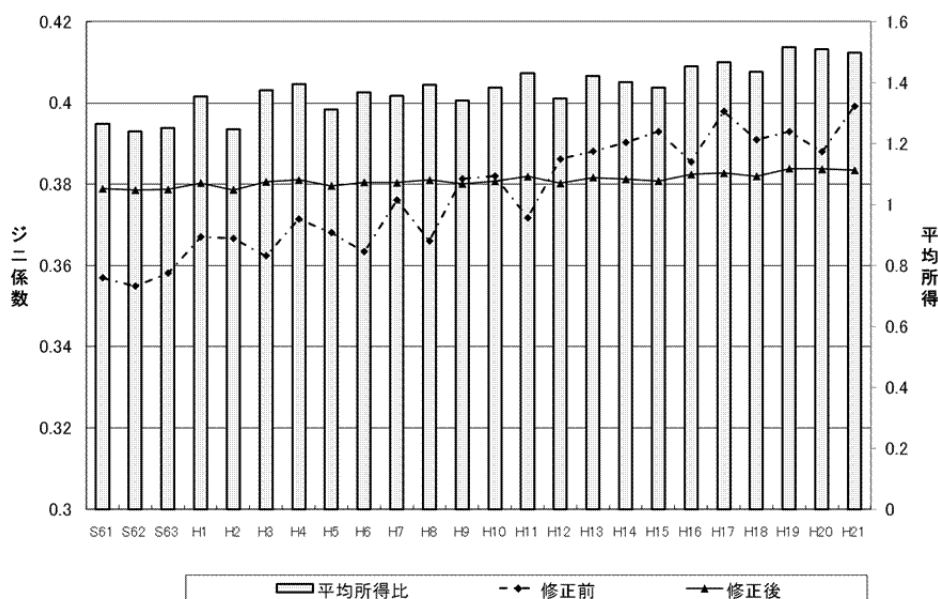
この図からは、1990 年代半ばから、2つの年齢層とも平均所得が減少していること、また、高齢者比率の増加に伴って、全年齢層の平均所得が2つの値の中央に近付いていることが読み取れる。この平均所得の変化、特に非高齢層の平均所得の高齢層の平均所得に対する比率（以下、平均所得比）が、ジニ係数にどのような影響を与えるかを見ていこう。

前節と同様に、基準となる分布 $\varphi \in \Phi_{24}$ を作る。この分布の平均所得は高齢層が 456.6294 万円、非高齢層が 630.8150 万円、全年齢層が 584.3753 万円となっている。この基準となる分布の高齢層の平均所得を m_1 、非高齢層の平均所得を m_2 とし、 y 年をそれぞれ m_{1y} , m_{2y} とおく。このとき、

$$\bar{\varphi}_y = \left(A \left(\frac{m_{1y}}{m_1} \right) \circ \bar{\varphi}_1 \right) \oplus \left(A \left(\frac{m_{2y}}{m_2} \right) \circ \bar{\varphi}_2 \right) = \bar{\varphi}_{1y} \oplus \bar{\varphi}_{2y}$$

とおくと、 $\bar{\varphi}_y \in \Phi_{24}$, $\bar{\varphi}_{1y} \in \Phi_{24p}$, $\bar{\varphi}_{2y} \in \Phi_{24(1-p)}$ となる。これは、 φ の分布から、高齢者比率は基準に等しく、平均所得が y 年のそれぞれの年齢層に等しい分布を作ったことに相当する。度数分布表から作る場合は、階級値を各年齢層ごとにそれぞれ $\frac{m_{1y}}{m_1}$, $\frac{m_{2y}}{m_2}$ 倍してから、階級値の大きさの順に度数を並べ直して全年齢層の度数分布表を作成する。 y を S61 から H21 までとって、24 の分布を作り、各年次の全年齢層のジニ係数を計算し、それと各年次の平均所得比をグラフにしたものが図 5 である。

図 5: 修正されたジニ係数と平均所得比の推移



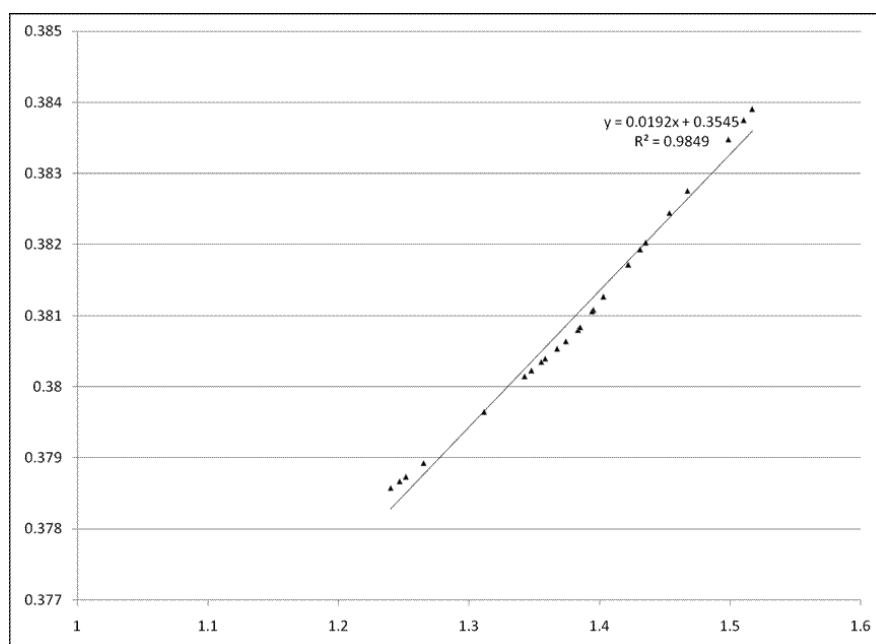
この図からは、この間のジニ係数の増加に占める平均所得比の変化の影響は高齢者比率に比べると軽微であることがうかがえる。実際、修正されたジニ係数の最小値が S62 年の 0.3786、最大値が H19 年の 0.3840 であり、同じ年の修正前のジニ係数がそれぞれ、0.3550, 0.3930 なので、

$$\frac{0.3840 - 0.3786}{0.3930 - 0.3550} = 0.142$$

となり、高齢者比率の 4 分の 1 程度である。

平均所得比がジニ係数に及ぼす影響を見るために、この 2 つを散布図にしたのが図 6 である。

図 6: 平均所得比と修正されたジニ係数の相関



平均所得比と修正されたジニ係数の相関係数は 0.9924、回帰直線の方程式は $g = 0.0192r + 0.3545$ (g はジニ係数、 r は平均所得比) となる。このことから、軽微であっても平均所得比の変化は確実にジニ係数に影響を及ぼしていることがうかがえる。図 5 からは、平均所得比の今後の傾向はうかがえず、社会情勢の変化が閉今日を及ぼしていくものと思われる。

8 おわりに

「高齢化がジニ係数の主因である」という主張は、従来、高齢層のジニ係数は非高齢層のそれよりも高く、その高齢層の比率が増えているから全体のジニ係数も増えているといった、平均値と混同したような議論の仕方が見られた。しかし、先行研究や本論文の 5 節で示された通り、このことは、ジニ係数の数理的性質としての一般論からは正しい主張とは言えない。

しかし、6 節で示した通り、ここ数十年の日本の所得状況といった前提の中で、高齢化のみを主要因として取り出した場合、ジニ係数の増加の半分程度は高齢化で説明できることがわかった。

また、7 節では非高齢層と高齢層の平均所得の比も、ジニ係数の増加に影響を与えていることが示された。

今回用いたデータは国民生活基礎調査という限られた標本調査からとったものであった。今後は、もっと精密なデータを用いた分析を行っていきたいと考えている。

参考文献

- 大竹文雄 (2006) 「『格差はいけない』の不毛」, 『論座』 2006 年 4 月号, pp.104-109, 朝日新聞社
- 盛山和夫 (2006) 「不平等度の高い集団の比率とジニ係数の変化」, 『理論と方法』 2006, vol.21, No.2:333-342
- Hamada, Hiroshi(2005) "Parametric Decomposition of the Gini Coefficient: How Change of Subgroup Affect an Overall Inequality" 『理論と方法』 2005, vol.20, No.2:241-256
- 全国消費実態調査トピックス-日本の所得格差について-
<http://www.stat.go.jp/data/zensho/topics/1999-1.htm>
- 国民生活基礎調査—厚生労働省
<http://www.mhlw.go.jp/toukei/list/20-21.html>
- 『理論と方法』 電子版
<http://www.jstage.jst.go.jp/browse/ojjams/-char/ja/>