『数学の現象学』精読Ⅰ
A Commentary on "Suugaku no Genshougaku (Phenomenology of Mathematics)" Ⅰ

竹山　理
Osamu Takeyama

１．はじめに

現象学の創始者として知られるフッサール（Edmund Husserl, 1859-1938）は、ベルリン大学の学生時代に数学者ヴァイアーシュトラス（Karl Weierstrass, 1815-1897）に師事し、その後にウィーン大学でヴァイアーシュトラスの高弟ケーニヒスベルガーの指導を受け、数学上の博士論文を作成して学位を取得している。数学者出身のフッサールがどのような思想上の経緯を辿って現象学を創設したのか。この点については、現象学研究におけるいわば「空白部分」になっているという。この空白部分を埋める和書が、鈴木俊洋著『数学の現象学』（法政大学出版会、2013年）である。著者は「まえがき」で本書の目的を次のように述べている。

> 一人の哲学者フッサールが数学論から現象学を作った過程を数学史の中に位置づけながら語ったものであり、その結果できた現象学の枠組みで数学論の問題がどのように見えるかを説明したものである。（７頁）(1)

さらには数学と現象学を結合することで、新たな知見を得たという。

> 現象学的に語ることで、数学における直観的把握というものを哲学的に記述できるものとして見られるようになり、数学的直観を扱う方法論として見ることで、現象学を広い射程を持つ強力な哲学の方法論として見られるようになった。（11頁）

本書は全体が３部に分けられ、緊密な関連をもつ13章から構成されている。「フッサール現象学創設前史」という副題をもつ第１部「ヴァイアーシュトラス・プログラムからの課題」では、現象学創設の動機となる数学論上の問題背景を明確にし、フッサールの数学観を形成する基本テーゼと、取り組まざるを得なかった課題を具体化している。第２部「フッサールの現象学創設の過程」は、現象学の方法論が形成され深化拡大していく過程を、『算術の哲学』、『算術の哲学』直後の草稿、『論理学研究』、『物と空間』、『イデーンⅠ』とフッサールの著作を順次たどり、思考の道具として現象学的対象観が完成されたとき、第１部で提示したヴァイアーシュトラスからの諸課題にはじめて解答できることを論述している。フッサールは後期において発生的現象学の手法を導入して現象学的数学論を完成し、ヒルベルトの形式主義およびブラウアーの直観主義のいずれとも立場を異にする独特の数学観を形成する。その具体的な様相を、実数と排中律を巡る問題を軸に論じたのが、第３部「数学の現象学の展開」である。

さて、この大部な書籍の潜在的射程を含めた全体を、小さな研究ノートで詳細に論じることは困難であろう。ところで著者は次のような自負を吐露している。

> 第１部の考察の視点は、現象学的数学論においてこれまであまり焦点が当てられてこなかった問題に焦点を当てている。第１部で論じられる現象学創設前史の捉え方は、本書を他の先行する研究から区別する大きなポイントとなるものである。（15頁）

この第１部は次の３つの章から構成されている。

第１章　解析学の算術化の運動（ヴァイアーシュトラス・プログラム）

第２章　なぜ「抽象」でなければならないのか

第３章　19世紀数学における「存在論的革命」と現実的無限

そして、フッサールが数学論の形成において、ヴァイアーシュトラスから踏襲する次の３つの基本テーゼを軸に、論述が展開されている。

［基本テーゼ１］解析学の体系は自然数の概念と演算の理論から純粋に論理的推論のみによって構成されなければならない

［基本テーゼ２］自然数は具体的事物の集合から「抽象 Abstraktion」によって得られる

［基本テーゼ３］自然数とは基数である

テーゼ３－１　「数学におけるプラトニズム」が許容されなければならない

テーゼ３－２　古典的数学の常識が保存されねばならない

テーゼ３－３　数学の本当の目的は新しい概念の創出とそれによる成果である（32頁）

そこで以下においては、３つの基本テーゼを定立している第１、２章に焦点をあてる。基本テーゼを定立するに至る経緯に論点を絞り、関連する文献を参照しながら精読を試みる。

２．フッサールの数学的実践

フッサールは独自の数学論を形成していく結節点で、心理主義（ブレンターノ）、論理主義（フレーゲ）、形式主義（ヒルベルト）、構成主義・直観主義（クロネッカー、ブラウアー）との交渉を経験する。その過程において明らかな党派性を持たなかったことから、一貫性がなく整合的に理解できないと批判されることがある。しかし著者は、フッサール数学論の歴史的位置づけに関して一貫した主張ができるという。

> フッサールは、実際に数学研究を遂行する数学者 working mathematicians の数学的実践の主潮流の要求に沿う形で数学論を展開させ、その中で現象学的方法論を生み出し、そのような過程で生み出された方法論は、数学の主潮流に哲学的基盤を与える、という主張である。（13頁）

すなわち、フッサールは数学論を展開させる過程で、数学研究の主潮流にある数学者の数学的実践の要求に沿うことを前提にしたというのである。ではなぜ、このような前提をするに至ったのか。この疑問に答えるために、フッサール自身の数学的実践を検証しよう。

はじめに、フッサールが修学した数学とは、どのようなものであったかを見ておく。立松弘孝「フッサール その生涯と思想[(2)]」によれば、フッサールは1876年の秋にライプチヒ大学へ入学、３学期間で天文学、数学、物理学および哲学を聴講した後、1878年４月に数学を専攻する目的でベルリン大学へ転校、そこで６学期を過した。当時のベルリン大学数学科は、クンマー、クロネッカー、ヴァイアーシュトラスを擁し、世界の数学教育の中心地であった。Grayはその様子を次のように活写している。

> The leading German university was Berlin, where Dirichlet and Jacobi taught for a while. Under the leadership of Kummer, Kronecker, and Weierstrass it grew remarkably in the second half of the nineteenth century, until audience of two hundred were common. Almost all German mathematicians studied here for a while. Complex analysis, including the theory of differential equations, was emphasized in Weierstrass's lecture courses, while Kummer and Kronecker were number theories in the broad sense of the term.[(3)]

フッサールが最も影響を受けたのはヴァイアーシュトラスであり、４学期のコース制で行われた彼の講義を、シ

リーズの始めから終わりまでの全部を聴講したという。Hartimo はその詳細を次のように要約している。

Husserl attended the full cycle of lectures given by Weierstrass, starting, as was expected, from the lectures on the theory of analytic functions (1878). Afterwards followed the theory of elliptic functions (1878-1879), and then the lectures on the calculus of variations (1879). In connection with the course on the calculus of variations, Husserl's notes were among those that were used in the published editions of Weierstrass's lectures. Next, Husserl attended the lectures on the use of elliptic functions to solve selected geometrical and mechanical problems (1879), lectures on the theory of Abelian functions (1879-1880), and again lectures on the theory of analytic functions (1880-1881). Husserl also attended lectures on the theory of algebraic equations by Kronecker in 1878-1879.（4）

18世紀には実数を変数とした関数を解析する微分積分学が発達を遂げたが、18世紀の末頃から計算上の技術として、複素数を積極的に活用するようになると、独立した分野を形成するようになる。解析関数論（the theory of analytic functions）とは、複素数を変数とした関数の解析学であり、現在では複素関数論、あるいは複素解析（Complex analysis）ともよばれている。Verley はヴァイアーシュトラスの複素関数論を、次のように要約している。

彼自身の告白によれば、Weierstrass の主要な動機は、1840年以来楕円関数および Abel 関数の研究であり、そしてこの展望こそが、彼をまずもって複素関数論の深化に導いたのである。実際彼はひとつの独創的な近づき方を発展させ、それがいかなる幾何学的直観にも訴えることのない、この理論のはじめての厳密な展開を構成する。基礎に対するこの心遣いが、まさに Weierstrass 流厳密さの真骨頂である。（5）

ここで言う「ひとつの独創的な近づき方」とは、ベキ級数（ベキ関数 ax^n を項とする無限和）を出発点とするものである。

ヴァイアーシュトラスの出発点は、ベキ級数である。その収束円の内部における級数の値は、収束円が存在するかぎり、「関数要素」を構成する。「解析接続」は、それ自身がベキ級数だけで遂行され、・・・この解析接続の助けを借りて「解析関数」は一つの関数要素から生じるあらゆる解析接続の総体として生じる。（6）

こうして解析関数の理論は級数論からの帰結となり、算術的な基礎の上に築かれることになる。「ヴァイアーシュトラスは、人に先がけて算術的基本演算にまで立ち返り、連続講義ではいつも無理数の本質に関する厳密な論究から始めた（7）」という。

楕円関数論（the theory of elliptic functions）とアーベル関数論（the theory of Abelian functions）は19世紀数学を発展させる基盤であった。佐々木力『数学史』を参照する。

楕円などの円錐曲線の求長問題はいわゆる楕円積分となり、また、平面上のいくつかの定点からの距離の積が一定の点の軌跡は一般にレムニスケート（結んだリボン）と呼ばれ、18世紀以降の無限小解析に広大な未解決問題を提供した。・・・このような問題領域から楕円関数論が発展した。フランスで楕円関数論をとりわけ熱心に研究し、包括的著作にまとめたのはルジャンドルであった。さらに体系化を計ったのが、ヤコービのモノグラフ『楕円関数論の新しい基礎』（1829年）であった。ルジャンドルもアーベルも楕円積分のことを楕円関数と呼んでいたのであるが、その逆関数を改めて楕円関数と呼び直したのは、ヤコービでその著作の第17節においてであった。そして、ルジャンドルは『楕円関数論考』第３巻の第三補遺（1832年）において、$\int f(x)dx/\sqrt{X}$ において X が四次を超える形をした、通常の楕円関数を構成する代数関数の次数を超える超越関数に「超楕円関数」という名前を与えた。ヤコービは、その紹介記事の中で、1829年に夭折したノルウェーの数学者が開拓した研究領域であったから、顕彰の意味で、その関数を「アーベル的超越（関数）」と呼んだが、これが今日の「アーベル関数」という呼び名の由来である。楕円関数論とアーベル関数論は、その後、リーマンやヴァイアーシュトラスによって考究され、ごく一般的な関数論が体系的形態を整えるまで、19世紀数学の巨大な発展基盤となった。（8）

ヴァイアーシュトラスは、楕円積分や楕円関数の理論を複素数の領域にまで拡張し、楕円関数論を体系づけた。1860

年代のはじめからベルリン大学で定期的に講義をし、1882年には楕円関数を扱った論文『楕円関数論』を公表した[9]。ヴァイアーシュトラスが論文にまとめる直前の講義を、フッサールは聴講したことになる。

微積分法が形成された動機のひとつは極値問題であるが、その初期の段階から、変化する数量に依存した関数の極大・極小を考えるだけでなく、変化する曲線に依存した極値問題が競って研究された。たとえば、等周問題（平面上で長さが与えられた閉曲線が囲む面積を最大にする問題)、測地線（曲面上に与えられた２点を結ぶ最短線）や最速降下線（鉛直面上に与えられた２点を結ぶ曲線で、質点がそれに沿って降下する時間が最小となるもの）を求める問題などである。

1744年にオイラー（Leonhard Euler, 1707-1783）は、「最広義に受けとられる等周問題の解法」という別題をもつ著作『極大ないし極小の性質をもつ曲線を見いだす方法』を刊行し、1766年には論文「変分計算原論」を出版した。オイラーはその著作において、曲線を関数のグラフと認識し、未知関数およびその導関数を含む定積分 J の極値問題として、先人たちの結果を体系的にまとめた。さらに、極値をあたえる未知関数がみたす一般的な微分方程式（変分方程式）を導出した。ラグランジュはオイラーの著作を熟読し、幾何学的で曲線的な解法から自由な、代数解析的方法を駆使した。関数を変化させる作用素 δ をはじめて考え、定積分 J が極大または極小となる必要条件を、第１変分 $\delta J=0$ で与えて変分方程式を導出した。現在、オイラー・ラグランジュ方程式を呼ばれる所以である。こうして18世紀の末には、変分法（the calculus of variations）として解析学の１つの分野に成長した。その成功は19世紀の数学者に強い影響を与え、純粋に数学の問題だけでなく物理学の諸問題への応用が研究された。大きな貢献の一つとして、ハミルトンとヤコビが多体問題における正準方程式を独立に論じたことが挙げられる。

またヤコビは、未知関数およびその導関数を含む定積分 J の第２変分 $\delta^2 J$ について研究し、極値に関する条件を調べるために第２変分をかきかえて、いわゆる「ヤコビの微分方程式」を導いた。1836年の論文『変分法と微分方程式の理論』は決定的な影響を与えたという。

> ヤコビのこの論文は記述が簡単であった。しかし変分法のその後の研究に決定的な影響を与えた。まず第２変分のくわしい研究が1857年クレプッシュによって発表され、続いて数年後にマイヤーがおこなった。変分法の古典的方法は前世紀（19世紀）の後半を通じてマイヤーによって一応完成されたとみられる。[10]

一方で、ヴァイアーシュトラスは1865年から90年まで、変分法について定期的に講義をおこなっている。

> かれ自身、変分法についての論文は発表しなかったが、講義を通じて、変分法を体系づけ、理論構成に必要な概念や多くの結果を導いた。[11]

変分法における基本補題（1879年にデュ・ボア・レイモンが与えた）を用いて、ヴァイアーシュトラスは変分法で必要とする微分方程式を厳密に導いた。さらに、第２変分やヤコビ理論において重要となる「共役点」の概念について詳しく論じ、極値の条件を与えるための関数（ヴァイアーシュトラスの E 関数）を導入した。講義録（全集第7巻）によると、ヴァイアーシュトラスが E 関数を導入したのは、フッサールが聴講した1879年の講義である。

こうしてベルリン大学の３年間を数学の修学で過ごしたフッサールは、1881年の春にウィーン大学へ移り、ケーニヒスベルガーの許で学位取得の準備に着手する。1882年10月２日に受理された学位論文『変分法への寄与』[12]は、現在ウィーン大学の図書館に保管されているという。この論文は次の全３章からなる。

1．変分法の一般論に関する最も簡単な問題に対する注意
2．クレプシュとヤコビによる第２変分の変換に基づく判定条件の演繹について
3．極値の存在のための限界点

上述したヤコビの微分方程式、クレプシュとマイヤーによる第２変分の変換式、ヴァイアーシュトラスの共役点の

研究等を踏襲しつつ、新たな見方と手段を導入して定理を再構成している。たとえば第１章で、変分問題の極小値の存在に関する定理を証明した後で、自ら次のような注記をしている。

上の定理は変分法の最も一般的な問題の場合にも、全く同様に証明することができる。クレプシュ（『クレレ誌』55巻 (13)）が与えた証明や A. マイヤー（『クレレ誌』69巻 (14)）の論文中で再現されている証明は単なる証明であり、定理の成り立つゆえんを明確にしていない。それゆえ、上のきわめて明確な証明はここで述べる価値があろう。(15)

オイラー・ラグランジュ方程式によって見出された関数に対して、定積分 J が極大になるのか極小になるのか、あるいはどちらでもないのかを決定するためには、第２変分の符号の研究が必要となる。直接的に符号を特定することが困難なため、要求をみたすように第２変分を変換する理論が課題となった。ヤコビの理論は、最も基本的な変分問題に対してこの要求に応えた。クレプシュは変分法の最も一般的問題に対して、同様に第２変分の変換を実現したが、式の複雑さのために問題の解決そのものは進展しなかった。論文の第２章ではここまでの展開を辿り、新しい手法を適用する前に次のように述べている。

我々は理論の完全な構築とマイヤー（A.Mayer）氏が決定した判定条件を確立しなければならない。ここでは、それを適用することによってすべてが達成できるように（積分）定数を特別に選びうまく決めることによって、はるかに有利な新しい手法をとる。・・・この手法はこれまでの結果に何も付け加えることはないけれども、そのことはクレプシュとヤコビの変換を出発点として、判定条件に直接的に達することができるために、副次的な計算のすべてから解放された、一般的で自然な方式を見出すための興味を完全に失うことは恐らくないであろう。(16)

論文の第３章では、ヴァイアーシュトラスが1879年の夏の講義で厳密に証明した定理を紹介して、次のように書いた。

対応する定理が一般の場合の問題に対して同様に正しいと予想したくなるのは当然である。しかしながら、ヴァイアーシュトラス氏の証明は最も一般な問題に拡張することを許さない。・・・あらゆる新しい手段を借りながら重要なこの定理を証明する試みを述べよう。(17)

フッサールは論文の最後を次のように締めくくっている。

私は変分法の基礎的定理に対して第二の証明を見いだした。変分法の基本原理はきわめて単純なものである。しかし厳密に論述するには広範囲の十分な考察が必要であり、その説明は我々をはるか遠くに連れていくことになる。(18)

これまでの検証から、フッサールは青年期の濃密な５年間を、数学研究の主潮流の最先端に身をおき、自らも数学的実践に専心していたことがわかる。では、数学研究に従事する working mathematicians は数学の進歩の本質をどのように考えるのだろうか。著者は、フッサールと同時代の数学者デデキントの『数について－連続性と数の本質』から次の一文を含む箇所を引用している。

数学においても他の科学においても、最も偉大な最も結果を多く生む進歩は、とりわけ新しい概念の創造と導入によって果たされたし、古い概念によっては骨を折ってやっと支配できるような複雑な現象がしばしば繰りかえされた後に、新しい概念に達したものである。(30頁)

現在でも、例えばブルバキを牽引した一人であるデュドネ（Jean Dieudonné, 1906-1992）によれば、数学発展の原動力は、新概念の起源となる問題への熟慮と、問題の解決に向けた新たな方法の創造にあるという。

数学の発展の主要な原動力は内的起源から、つまり解こうとしている問題の性質への深い熟慮にあるのであって、・・・数学のある問題の解決は、往々にしてまず経験による模索に始まり、巧みな着想によって、理由は全く分からないが、（部分的にまたは完全に）目標にまで導かれる。場合によっては、この着想を掘り下げることによって、あるいは（時には非常な複雑化と引きかえに）そこに隠れている技術を発展させ洗練させることによって、最初の技巧の有効範囲を著しく拡大するのに成功し、かくして非常に一般的な方法が創造され、最初の問題以外の他の問題にも応用される。(19)

次節で述べるヴァイアーシュトラス・プログラムが、実際に数学研究に従事する数学者の主潮流に継承され、フッ

サールも踏襲することになる最終的な理由として、著者は第１章の終わりに次のテーゼを定立している。

テーゼ３－３　数学の本当の目的は新しい概念の創出とそれによる成果である（32頁）

本書の第２部を先取りして述べれば、フッサールが生み出す現象学的方法論は、数学的概念の創出と把握の問題に哲学的基盤を与えることになるのである。

３．解析学の算術化の運動と基本テーゼ１

フッサールはベルリン大学の修学時代に、ヴァイアーシュトラウスが主導していた「解析学の算術化の運動」から多大な影響を受けた。実際、後に次のように述懐している。

> 私の偉大な師であるヴァイアーシュトラスは、関数論の講義によって、大学時代の私の中に数学の徹底的な基礎付けへの興味を喚起した。私は、理性的思考と非理性的直観 Instinkt や感覚 Takt の混合であった解析学を純粋に理性的な理論へと変えようとする彼の努力をよく理解することができた。彼の目的は、解析学の体系すべてを完全に厳密で容易に理解できる方法のみによって構成ないし演繹するための基礎になるような解析学の根本的土台、基本概念、公理を取り出すことだった。（21頁）

著者はこの「解析学の算術化の運動」、すなわちヴァイアーシュトラス・プログラムの最も基本的な目的を、次のように定立している。

［基本テーゼ１］解析学の体系全体は自然数の概念と演算の理論から純粋に論理的推論のみによって構成されなければならない（22頁）

解析学は「量の理論」である。その体系全体は、連続量としての実数、数列や級数の収束、関数の極限、連続性、微分、積分といった概念に基づいている。基本テーゼ１は、このような基礎概念を自然数の概念と演算の理論から、すなわち「数の理論」（算術）から構成ないし演繹することを要請している。では一体なぜ、ヴァイアーシュトラスをはじめとした当時の数学者たちは、一見すると奇妙とも思える「解析学の算術化の運動」に深く関与したのだろうか。ボタチーニ『解析学の歴史』[20] および Dugac「解析学の基礎」[21] を参照しつつ、数理科学に厳密な基礎を与えようとした人々の試みが、いくつかの段階を経て解析学の算術化運動に焦点化していく過程を見ておこう。

19世紀が始まる直前の 1797年に、ラグランジュ（Lagrange, 1736-1813）は『解析函数論』を著したが、自著の主目的を講義中に次のように明言していたという。

> 微分計算から無限小あるいは消失量の形而上学的考察を取り除くこと。微積分計算を他の代数学における計算と全く一つの方法をなすものとして統合すること。[22]

当時の数学者は接線問題（微分計算）や求積問題（積分計算）の解決のために、無限に小さい量（消え行く量）を道具として利用して、有限量の間の関係を導出していた。しかし、当時のあらゆる著作において、無限小量の定義は見いだせないのである。ラグランジュは関数を一般的に定義し、任意の与えられた関数が一つの級数（無限に和をとった式）に展開できる場合には、純粋に代数的な技法によって、関数のテイラー級数展開（ベキ関数を項とする無限和による表現）が形式的に得られることを示した。ラグランジュは「微積分を有限量の単純な代数的操作に還元する必要性を強調した[23]」が、その基礎となる極限概念を有限量の代数的な解析に帰着する方法は、コーシーが近代解析学への道を開く必要があった。

19世紀初頭、ボルツァーノ（Bernard Bolzano, 1781-1848）は解析学の基礎について深い諸問題を提出した。1817年の論文では、連続関数の定義をはじめて与え、区間［a, b］上の実数値連続関数 f は $f(a)$ と $f(b)$ の間のあらゆる値をとる（中間値の定理）と主張した。また、一般項を持つ級数の収束条件を考察して、コーシーの判定条件と同じ必要十分条件に言及した。Dugac はこの論文を、「後に解析学の算術化と呼ばれることになる試みへの最初の

決定的な一歩をなすものである [24]」と評価した上で、級数の収束の十分性の証明は、「極限値を欲するだけの精度をもって決定できる [25]」ことを仮定した循環論に陥っていると指摘して、次のように述べている。

> 極限の定義を与える前にまず、その定義を適用すべき対象、すなわち実数の集合 R を定義しなければならない、ということを数学者たちが自覚しない限り、循環論法は不可避であった。[26]

コーシー（Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857）は理工科大学校における教育目的から、1821年に『解析学教程』を著した。「その厳密さと、著者の数学的構成の明解さと優美さにより、近代解析学への道を開くものであった [27]」。関数を一般的に考察し、関数の連続性の定義を与え、級数を一般的に考察し「如何なる場合に総和可能であるか、言い換えればその収束のための条件は如何なるものか [28]」を調べて、コーシーの判定条件として知られる必要十分条件を与えている。ただし、「コーシーは、条件が必要であることを証明するのに何らの困難を感じなかったが、その十分性に関しては、ボルツァーノのように、「逆にこれらの条件が充たされるときに、級数の収束が保証される」ことを主張するにとどめている [29]」という。「彼の主張は数直線の連続性の幾何的直観に基づき明らかであるとするが、50年後に明らかになるように、「コーシーの判定基準」の十分に厳密な証明は、まず実数の体の構成を必要とする [30]」のである。また、コーシーは量の尺度をもとに有理数を導入した後で、無理数に言及している。「無理数というものを、《相互に次第に近づいてゆく種々の分数の極限》として定義していた。しかし有理数の極限について述べるためには、あらかじめ実数の集合 R がすでに定義されている必要がある [31]」ことは明らかであろう。

同時代にこの点を指摘したのが、『数学原論』全９巻を著したオーム（Martin Ohm, 1792-1872）である。その再版第２巻（1828年）の序において、「傑出した Cauchy もまた彼なりに《解析学の不完全で非科学的な状態に注意を向けた》が、一般的かつ堅固な体系を構築するには到らなかった、・・・Cauchy は抽象的数の一般論を作ろうとしていないが、《しかしこれなくしては解析学は存立し得ないのである》としている [32]」。オームは自然数全体の集合の存在を所与のものとし、加法と乗法を定義したあとで、除数（乗法の逆元）を導入して有理数を定義する。無理数に関しては、正の有理数の除数冪で表したもので有理数にならない場合に限られているが、このような抽象的数が数学の全分野を包括する最も重要な概念だと考えた。Dugac は「我々はここに、整数を出発点としてあらゆる数学を再構成しようという初めての計画を目のあたりにする。すなわち、解析学の算術化の第一歩である [33]」と評価している。

この時期は解析学に様々な困難が生じていた。アーベル（Niels Abel, 1802-1829）は「とりわけその基盤がほとんど確立されていない無限級数の理論にかかりきっていた [34]」。1826年１月16日、郷里クリスタニアの恩師ホルンボエに書いた長い手紙の中で、無限級数がつくりだす多くの逆説を例示して、次のように述べた。

> 一般に現在まで無限級数の理論は、大変そまつなものです。無限級数についてのあらゆる種類の演算を、あたかもそれらが有限であるかのようにとり行いますが、それはさしつかえないのでしょうか？決してそうではありません。無限級数の導関数を、各項の導関数をとることによってうることができると何処で証明されましたか？ [35]

そして、実際に正しくない例を提示している。この例は1829年に発表した２項級数に関する論文においても取り上げられ、コーシーが述べた定理「各項が連続関数の級数の和は連続関数である」の反例であることが注記されている [36]。また、クリスタニア大学の教授ハンスティンへの手紙に次のように書いた。

> 解析は現時点では、大変に計画や統一を欠いている・・・、最も悪いことには、解析が全然厳密性をもって取り扱われていなかった。完全に厳密に証明された高等解析の命題は、ほんの少ししかなかった。[37]

このように解析学に内在した、基礎を厳密化したいという要求が、19世紀後半の数学者を実数体 R の構成へと向

かわせることになった。Dugac は次のように述べている。

> 極限の概念が関与する諸問題に関連してすでに指摘した様々な困難から、集合 R の厳密な定義が要求されるようになっていた。これに加えて、諸々の基礎を熟慮反省していた数学者たちに実数の集合を《構成すること》を示唆したと思われる理由として、さらに次の二つ、なかんずくその後者が挙げられよう：まず第一に無理数に関するより多くの知識がえられていた。・・・次には、整数から出発して解析学全体を構成し、その成果として解析学を算術化しようという一般的な傾向であった。(38)

そして、当時の数学者が考案した３つの異なる実数論（ヴァイアーシュトラス、デデキント、メレー／カントール）を吟味している (39)。

これまでにおいて、数理科学に厳密な基礎を与えようとした19世紀の数学者たちの試行が、いくつかの段階を経て解析学の算術化運動に焦点化していく過程を見てきた。著者は基本テーゼ１を定立するに際し、その経緯を次のように要約している。

> 解析学の算術化プログラムは、それまで数直線上の点という幾何学的直観に基づいて把握されていた実数、微分、連続性といった概念を含む命題の推論が、直観的把握から逸脱するような結論を出すことの発見が一つの契機となっている。数学者たちは、その原因は解析学が厳密な基礎付けを欠いているためだと考え、解析学の基礎となるべき「直観的把握を逸脱しない基盤」を求めた。その基盤として設定されたのが自然数とその演算の理論であった。(22頁)

つまり、数学研究を実践する数学者は、自然数とその演算のみが関わる推論ならば直観的把握を逸脱することなく安心して遂行できると確信し、この基盤の上に解析学の全体を構築すればよいと考えたのである。その最も重要な段階が、自然数から実数を構成すること、すなわち自然数とその演算の理論から実数を定義することであった。このように実数を定義できれば、実数についての命題（解析学の命題）は、論理上は自然数についての命題に還元できるのだから、直観的把握を逸脱することなく推論を安心して遂行できるのである。

４．数学におけるプラトニズムと基本テーゼ３

解析学の基礎として自然数を設定するという基本テーゼ１は、それでは「自然数とは何か」という問いを誘発する。この問いに答える立場の相違が、様々な数学観を派生させることになる。フッサールが数学を修学し数学研究を実践した時期は、後に成立する「数学基礎論」の諸立場が形成される途上であった。榊原哲也はロジェ・シュミットの研究 (40) に依拠しつつ、次のように記述している。

> フッサールが間近に接したのは、当時「数学の対象」をどう見るかをめぐって表面化しつつあった「プラトン主義」的な考え方と「構成主義」的な考え方との対立であった。「プラトン主義」的な考え方とは、シュミットの整理によれば、カントールの集合論に代表されるもので、たとえ「もはや一歩一歩厳密に有限な手続きによっては実質的に構成されることできない」無限集合のような数学的対象であれ、その「無矛盾性」が証明されさえすれば、その対象を承認し、「数学的対象の即自存在」を認めようとする立場である。これに対して、「構成主義」的な考え方とは、「数学的対象」は「実質的な構成と結びつけられうる」ときにのみ「有意味」であると考え、数学的対象を本質的に「何らかの操作作用による産物」であると見る立場であり、その代表者クロネッカーは、「自然数を産出する構成のプロセス」を数学的活動一般のモデルと見なしたのである。・・・構成主義の立場が、その後、数学基礎論における「直観主義」に受け継がれることとなり、また他方のプラトニズム的な立場が、その後の「形式主義」や「論理主義」の考え方に繋がっていく。(41)

カントールとクロネッカーの対立は、しだいに激しさを増し1884年に頂点に達した。この両者の論争に際し、「ヴァイアーシュトラスは、カントールの立場に与する形で、これに介入した (42)」という。そのため本書の著者は、この対立を「自然数とは基数である」とするヴァイアーシュトラスと、「自然数とは順序数である」とするクロネッカーの論争と位置づけ、「ヴァイアーシュトラスとクロネッカーの間の論争（27頁）」と呼んでいる。

ヴァイアーシュトラスは連続講義において、常に算術的基本演算にまで立ち返り、数の本質に関する厳密な論究から始めたという。たとえば「解析関数論入門」の第１回目（1878年５月６日）の講義に関して、フッサールのノートに次のような記述がある。

> われわれが数の概念に到達するのに一番良いのは、数えるという操作を辿ってみることである。われわれは眼前に与えられている諸事象の総和を観察する。それらすべてを性質に関して吟味しながら、われわれはそれらのうちから、表象において統握されているある一定の徴表を有する事物を探し、この徴表を持つ個々の事物を一つの全体表象のうちにまとめる。こうして諸々の統一体からなる多が成立するが、これが数なのである。[43]

著者はこのヴァイアーシュトラス・クロネッカー論争が、「フッサール数学論を考える際に、最初の躓きの石になりうる（232頁）」と注意を喚起している。たとえば、榊原は上記の引用を根拠に「ヴァイアーシュトラスが、たとえカントールの側に与したとはいえ、基本的には、数を、「数える」ないし「集める」という心理作用から捉えていたということ、そして、その点では、「自然数を産出する構成のプロセス」を数学的活動一般のモデルと見なしたクロネッカーと軌を一にしていると見なしうる[44]」と主張し、「シュミットも、「数」を「人間精神の産物」と見なす点でフッサールは「彼が意識していたように思われるよりはるかに」クロネッカーに「近い立場にいる」ことを指摘し、これを論証している[45]」と述べた。しかし著者は、「ヴァイアーシュトラス・クロネッカー論争とフッサールの数学論との間には本質的な関係はほとんどないといってよい（232頁）」と結論づけている。

> フッサールへの影響関係という意味でも、クロネッカーの順序数が「数える行為」に由来するということと、フッサールが『算術の哲学』で「数える行為」を数概念の基盤として扱っているということは、言葉の親近性以外の系譜的つながりはない。・・・『算術の哲学』では、「数える行為」を基盤として、「数えられたもののなす集合の要素の数」として自然数が定義されており、ヴァイアーシュトラス・クロネッカー論争の中に位置づけるとすれば、フッサールにおいて自然数は一貫して「順序数」ではなく「基数」である。（231頁-232頁）

基数とは集合の要素の個数のことである。上に引用した「解析関数論入門」講義のフッサールのノートを改めて見ると、「個々の事物を一つの全体表象のうちにまとめた」ものが集合であり、「諸々の統一体からなる多」がその個数であると読むことができる。

ヴァイアーシュトラスが解析学の基礎として設定した自然数について、著者は次の基本テーゼを定立する。

［基本テーゼ３］自然数とは基数である（24頁）

さらに、自然数が基数でなければならない理由を問うのである。ヴァイアーシュトラス・プログラムにおいて、なぜ自然数は基数でなければならなかったのか。

> その理由は「数学におけるプラトニズム」の必要性にある。ここで「数学におけるプラトニズム」とは、集合というものを（無限の要素を持つものも含めて）一つの完結した対象として捉えることを許容する立場を意味する。（27頁）

著者は「数学におけるプラトニズム」という表現とその定義を、ベルナイス（Paul Bernays, 1888-1977）の論文[46]に依拠している。ベルナイスはヒルベルト（David Hilbert, 1862-1943）との共著『数学の基礎』巻１（1934年）、巻２（1939年）、および『公理的集合論』（1958年）で知られる数学者である。1917年から1933年までのおよそ16年にわたり、ゲッティンゲン大学でヒルベルトの助手と教職をつとめたが、ナチス党体制のユダヤ人排斥により、1934年の春にゲッチンゲンを離れることになる。論文「On platonism in mathematics」は数理科学国際会議の数理論理部門で、1934年６月18日におこなわれた講演の記録であり、次の一文で始まる。

> With your permission, I shall now address you on the subject of the present situation in research in the foundations of mathematics. [47]

すなわち、19世紀の末から1930年代までに形成された数学基礎論を俯瞰し、数学におけるプラトニズムが、直観主

義、論理主義、形式主義とどのように関係するかを論じているのだが、ここでは著者が依拠した部分を見ておこう。

ベルナイスは次の傾向を「プラトニズム」と呼ぶ。

The tendency ··· consists in viewing the objects as cut off from all links with the reflecting subject. (48)

ある理論が取り組む対象は、考察する主題との結合から切り離されて、ある全体（集合）の要素と見なされる。この観点から必然的に、属性についての選言命題「すべての要素がその属性を持つか、その属性を持たない要素が少なくとも一つはある」が導かれる。

··· the objects of a theory are viewed as elements of a totality such that one can reason as follows: For each property expressible using the notions of the theory, it is an objectively determinate fact whether there is or there is not an element of the totality which possesses this property. Similarly, it follows from this point of view that either all the elements of a set possess a given property, or there is at least one element which does not possess it. (49)

具体的に、算術におけるプラトニズムを考えると、最も弱い仮定（前提条件）は「自然数の全体を完結した対象として認める（28頁）」というものであり、自然数の属性について次の選言命題が導かれる。

自然数についてのある属性 P があるとすると、その属性 P はすべての自然数について成立するか、少なくとも一つの例外を持つかのいずれかである。(28頁)

ベルナイスは次のように書いている。

The weakest of the “platonistic” assumptions introduced by arithmetic is that of the totality of integers. The teritum non detur for integers follows from it; viz.: if P is a predicate of integers, either P is true of each number, or there is at least one exception. (50)

著者は簡明さを優先して、「端的に言えば、この命題を認める立場が「数学におけるプラトニズム」である（28頁）」とまとめた。言うまでもなく、選言命題は排中律（命題は真であるか、その否定が真であるかのいずれかが成立する）からの帰結である。

By the assumption mentioned, this disjunction is an immediate consequence of the logical principle of the excluded middle; in analysis it is almost continually applied. (51)

排中律からの帰結は、数学研究の実践において、絶え間なく適用されている。たとえば解析学では、実数 a、b の大小関係について、$a < b$、$b < a$、$a = b$ のいずれかであるという「三分法の法則」は、古典的数学の常識として証明に適用される。では「数学におけるプラトニズム」を許容しないとすればどうなるだろうか。ひとつは構成主義の立場である。

構成主義者には、古典数学における標準的証明の多くは無効である。ある場合には、彼らは構成的証明を与えることができる。しかし、他の場合には、彼らは構成的証明が不可能なことを示す；古典数学ではしっかり確立されていると思われる諸定理が、構成主義数学では偽であると宣告されるのである。(52)

実際、構成主義の立場においては、「三分法の法則」は普遍的には成立するとは限らないので、古典数学の常識も保存されないのである。

もしも「数学におけるプラトニズム」が許容されず、実数の「三分法の法則」のような古典的数学の常識が保存されないとすれば、数学研究の実践に致命的な障害となるだろう。

当時の数学者たちにとって、「数学におけるプラトニズム」は「古典的数学」の常識、つまり解析学を遂行してきた中で常識とされていたことが保存されるために必要だったのである。(29頁)

著者は第１章の終わりに次のテーゼを定立している。

テーゼ３－１　「数学におけるプラトニズム」が許容されなければならない

テーゼ３－２　古典的数学の常識が保存されねばならない（32頁）

それでは、なぜ古典的数学の常識が保存され、「数学におけるプラトニズム」が許容されなければならなかったのか。本論第２節の「フッサールの数学的実践」で、その定立の経緯を詳しく確認したが、「数学の本当の目的は新しい概念の創出とそれによる成果である」。新しい概念の創出には、抽象による想起がなされ、経験と直観による形象化がともなう。ベルナイスは「数学におけるプラトニズム」の重要性を、数学的概念化との関連で次のように述べている。

> The value of platonistically inspired mathematical conceptions is that they furnish models of abstract imagination. These stand out by their simplicity and logical strength. They form representations which extrapolate from certain regions of experience and intuition. [53]

すなわち、なぜ上記の２つのテーゼを定立するかに漠然と答えるならば、数学実践における直観の働きを保証するためであると言えよう。言うまでもなくこの点を詳細に論じるには、数学的直観を扱う方法論を確立する必要がある。それこそが本書第２部「フッサールの現象学創設の過程」で完成される「現象学的対象観」である。

5．数学的概念の把握と基本テーゼ２

本書の第２章は、数学的概念の把握と定義の問題に関わる内容である。自然数という数学の根本概念の把握と定義の問題について、フッサールの同時代人であるカントールとフレーゲの「集合の基数定義」を巡る論争を詳細に検討し、この論争に対するフッサールの対応から、彼が目指した数学論の基本姿勢を明らかにしている。そこで定立するのが基本テーゼ２である。

［基本テーゼ２］自然数は具体的事物の集合から「抽象 Abstraktion」によって得られる（24頁）

概念が「抽象」によって得られるとは、概念の外延をなすことになる具体的事物の集合から、個々の事物の現実的本質を捨象することによって得られるという意味である。例えば「円」という図形概念は、具体的事物で形状以外を捨象し、様々なまるい形から「偏りのない完全なまるい形」へと理想化することによって得られる数学的概念である。

ヴァイアーシュトラスは自然数を次のように抽象によって定義した。

> 正の整数に我々は、同種の gleichartig 事物が統一されていることの観察を介して到達する。我々が理解できる、ある一つの概念の現実化であるような一種の事物を我々は「同種である」と呼ぶことにする。これらの事物の現実的本質を捨象 abstrahieren すると、我々はそれらの事物を数としてのみ把握することになる。このようにして我々は［正の］整数を得ることになる・・・（24頁）

そして、正または０の整数の集合の存在を認めて、本論第３節で言及した「実数の構成」を講義した。Dugac によれば、「Weierstrass が実数論を作り上げたのは1863年頃と推定される。・・・Weierstrass は本質においては20年以上もの間、同じ実数論を講義し続ける [54]」。したがって、本論第２節で確認したように、フッサールは1878年の講義「解析関数論」を受講しているので、ヴァイアーシュトラスの実数論を知ったと考えられる。実はカントールも1863年から1866年にかけてベルリン大学で数学を学んでいる [55]。

ところで、よく知られているように、フッサールは1884年の冬学期からウィーン大学でフランツ・ブレンターノの講義を聴講するようになる。「哲学に対する関心が増大し、これまで通り数学を生涯の職業にすべきか、それとも哲学研究に献身すべきかどうかと迷っている最中に、たまたま好奇心から聴講したブレンターノの講義が機縁に

なって、哲学専攻の決意を固めたのであった[56]」と後に回顧している。こうして、1886年の夏学期までの２年間、フッサールはブレンターノの講義と演習に熱心に参加した。

ブレンターノは記述心理学を論理学その他の哲学的諸学科の基礎学と看做すと共に、ドイツ観念論を哲学の頽廃形態と見て、むしろイギリス経験論を尊重する立場をとっていた。初期のフッサールはこの考え方に強く影響されている。[57]

1886年の秋からフッサールは、ブレンターノ門下のカール・シュトゥンプフの許で大学教授資格取得論文の準備をするために、ハレ大学に移る。

当時のフッサールは算術学や解析学の基本的諸概念と諸原理に関する心理学的および論理学的研究に取り組む傍ら、シュトゥンプフの「心理学」および「論理学と哲学要綱」の講義を聴講した。[58]

そして1887年６月に、大学教授資格論文「数の概念について － 心理学的分析」を提出し、ハレ大学私講師となる。資格審査のときの試験官の一人が、カントール（Georg Cantor, 1845-1918）であった。その後フッサールはカントールと深い交友関係を結ぶことになる。Hill は次のように述べている。

Georg Cantor and Edmund Husserl were close friends at the University of Halle during the last fourteen years of the nineteenth century, when Cantor was at the height of his creative powers and Husserl in the throes of an intellectual struggle during which his ideas were particularly malleable and changed considerably and definitively. [59]

フッサールがハレ大学にいた時期に同僚のカントールは、集合の基数の定義法を巡ってフレーゲと論争をしていた。フレーゲ（Gottlob Frege, 1848-1925）は、イェーナ大学で２年の教育を受けた後、1871年にゲティンゲン大学に進み、数学者リーマンと物理学者ウェーバーに師事して1873年に、論文「平面における虚の構成体」で学位を取得する。1874年に母校のイェーナ大学の私講師になって以来、数学の基礎の曖昧さに不満を募らせ、数学と哲学の交錯する分野へ転進する。1879年の著作『概念記法 － 算術の式言語を模造した純粋思考のための式言語』では、命題論理と述語論理の公理的体系化を完成する。1884年の著作『算術の基礎 － 数概念に関する論理数学的探究』では、算術の論理化の試みが自然言語で記述され、自然数の基礎理論を展開した。次いで1893年には、『算術の基礎』で展開した基本法則の証明を概念記法を用いて与えた著作『算術の基本法則 － 概念記法的に導出された』の第１巻、1903年には実数論と量の理論を論じた同第２巻を出版している。

著者はこの両者の論争を、「抽象による基数定義」を主張するカントールと「同値関係による基数定義」を主張するフレーゲという図式に整理し、カントールの基数定義の推移を詳しく検証していく。1885年にカントールは、フレーゲの著作『算術の基礎』の書評を書く。ここでは「基数」（「濃度」）が意味することを得るために、「抽象」を用いてはいない。

集合の「濃度」という言葉で、ある集合と同値であるようなすべての集合、そしてそれらのみがそのもとに含まれるような普遍概念、を意味している。そして、２つの集合が「同値」であるとは、お互いに一意的に要素と要素を一対一に対応させることができることを意味する。（41頁）

論争の発端は、1887年の著作『超限数の理論についての報告』の中の基数定義について、「同値関係」によるものと「抽象」によるもとを混在させたことであった。

ある集合 M の「濃度」や「基数」という言葉で、私は、人がその集合について、その要素の性質を捨象するとともに、その要素がもっている、要素同士にであれ他の事物に対してであれ、すべての関係、中でも特に要素の間の順序関係を捨象し、M と同値であるすべての集合に共通なものに注目したときに得られるような普遍概念、類概念を意味する。（37頁）

２つの方法が混在した上記の基数定義に対して、フレーゲは「同値関係」で基数を定義するカントールと自分の理論の共通性を指摘しつつ、「抽象」による定義を削るように促した。

彼が私の著作の書評で述べた定義〔同値関係による基数定義〕をここでも繰り返し述べている。その定義は、そのときは、私

自身の〔基数の〕定義と、表現の仕方における非本質的なもの以外の相違はない、と私には見えた。・・・しかし、カントル氏は、ここでは、もう一つの定義〔抽象による基数定義〕を与えている。そして、その定義は、彼が未だ全く時代遅れの立場に立っていることを示している。(40頁)

フレーゲの批判の矛先は「抽象」という意識の操作過程の論理的な曖昧さに向けられ、要点は「抽象」に基づいた定義は心理主義的であり、算術の基礎に関与させることはできないというものである。このフレーゲの批判に対するカントールの最終的な反応は、1895年の著作『超限集合論の基礎付けへの寄与』の冒頭に見ることができる。

「集合」という言葉で我々は、我々の直観あるいは我々の思考の、あるきちんと区別された対象 m（それらを集合Mの要素という）を、一つの全体へとまとめたもの M を意味する。・・・すべての集合 M には、ある特定の「濃度」が帰属させられ、それを我々はその集合の「基数」ともいう。M の「濃度」あるいは「基数」というのは、その集合 M から、我々の能動的な思考能力を使って、その集合のさまざまな諸要素 m の「性質」と「与えられた方の順序」を捨象することによって生じる普遍概念のことである。・・・二つの集合は、それらを規則的に、一方のすべての要素のそれぞれの他方の一つのそして唯一の要素に対応させられるような相互関係におくことができるとき、「同値である」といい、・・・(42頁)

カントールはここで、「抽象」によって「基数」を定義したのちに、集合間に成り立ち得る一つの性質として「同値関係」を定義するのである。すなわち、カントールが基数定義から削ったのは、フレーゲの指摘した「抽象」ではなく「同値関係」であった。

Hill によれば、カントールは自らの「抽象」の理論は、同時代人の理論と比べてはっきりと異なる特徴をもち、算術の基礎にこれまでにない方法を提示するものと確信していたという。

Cantor developed a theory of abstraction which he believed was the distinctive feature of his number theory and represented an entirely different method for providing the foundations of the finite numbers than was to be found in the theories of his contemporaries. (60)

一方で、フッサールはカントールの論文の抜き刷りを、特に抽象の過程を説明している箇所に下線を引きながら精読している。

Cantor was propounding this theory of abstraction just as Husserl was writing “On the Concept of Number” and the Philosophy of Arithmetic, where a similar theory is espoused. Husserl actually has offprints of the “Mitteilungen (61)” and marked and underlined precisely those passage (and almost exclusively those passages) in which Cantor explained the abstraction process. (62)

こうして、フッサールは基本テーゼ２を踏襲することになる。

ただし注意しなければならないのだが、フッサールとカントールが数学の展開における同値関係の意義を軽んじたわけではないのである。一般に同値関係とは、一対一対応関係に限るものではなく、集合（の要素）を類別できる条件をみたす２項関係のことであり、例えばヴァイアーシュトラスが「実数の構成」を講義したときにも使用しているし、本書の第３章で詳述される「集合アプローチ」では中心的な役割を果たすことになる。

フッサールやカントルが否定したのは「同値関係」の方法的有効性そのものでは決してない。方法としての「同値関係」の有効性は疑い得ない事実である。実際に、カントルは自身の集合論の具体的展開には、「同値関係」を核となる方法として使用しているし、フッサール自身も後に『算術の哲学』直後に書かれた草稿において、「同値関係」の方法としての有効性について述べている。(48頁)

同値関係は数学の展開における道具立てとして有効であり、同値関係による定義は曖昧さを論理的に除去できる。このことを理解していたにもかかわらず、フッサールとカントールは、なぜ「抽象」による基数定義にこだわったのだろうか。そもそも「抽象」とはいかなる過程かを問題にする必要があるのだが、「なぜ」抽象でなければならないのかという問いには、『算術の哲学』の前半部に明確な解答が与えられているという。著者はその理由を次の

２点に整理している。

理由１ 数概念は定義できない（44頁）

理由２ 「同値関係」による数定義は事象そのものに即していない（45頁）

第１にフッサールによれば、定義できるのは「論理的に結合されたもの」だけであり、数概念のような根本概念それ自体は定義できないからである。

そのような根本概念、いわば定義付けの終点に行き当たった場合に人がなしうるのは、「それらの概念が抽出される元となる具体的現象を示したり、その抽出の過程のあり方を明らかにしたりすることだけである。」・・・この主張は、ブレンターノから引き継いだ心理主義的学問論の基本姿勢に由来する。（44頁）

次に数言表の意味を問う。たとえば、木の実が目の前にあるとしよう。

我々が本当にそこで興味を向けているのは、〔一つの〕木の実と〔一つの〕木の実と〔一つの〕木の実と〔一つの〕木の実がそこにある、という状態である。この不器用で回りくどい表象を・・・我々は、思考や会話に便利なようにただちに変化させ、その表象を・・・１と１と１と１、それらは４という名を持つ、と考えるようになるのである。（46頁）

これが数言表の事象そのものに即した意味、つまり「我々が生活や学問活動における日常的な言語の使用において数と名付けているもの」である。第２の理由は、このような「言葉の真なる本来的な意味における数概念」と「同値関係によって数を定義する理論によって名指されているもの」の「内容（内包）Inhalt」が相違するからである。この解答がフッサール数学論に一貫する姿勢を示す、と著者は結論付けている。また、著者と問題意識が重なるフッサール研究者 Hartimo も、同じ見解を述べている。

Husserl thinks that the concept of number is a primitive term that should be analysed by means of descriptive psychology. Husserl thinks it cannot be defined (in logic), writing that 'the difficulty lies in the phenomena, in their correct description, analysis and interpretation. It is only with reference to the phenomena that insight into the essence of the number concepts is to be won.' According to Husserl, direct experience, that is perception, it the ultimate basis for the meaningfulness analysis, whereas Frege relies on the certainty given to him by logic. Whereas Husserl only wants to describe our experiences, Frege's logical analysis consist in constructing a notion of number in the concept-script. Husserl finds such an approach artificial of, as he says, 'chemical'. He thinks that we should analyse concepts as they are given to us. [63]

著者に倣って、フレーゲとフッサール双方の基本的考察態度の相違を対照しておこう。数学的概念の哲学的考察を、フレーゲは「数学的概念の論理的関係を規定することによって」おこなおうというものであり、フッサールは「数学的概念が我々の意識に把握されるさまを規程することによって」おこなおうというものである。

では、カントールとフッサールがあくまでも「抽象」にこだわり、「同値関係による数定義」を批判することによって否定したのは何だったのだろうか。

彼らが否定したのは、「同値関係による数定義」を自然数の「数学的（あるいは論理的）定義」とすることでその解明を済ませてしまうことである。（48頁）

改めて、フッサールの数学論上の基本的立場を明らかにしておこう。

フッサールの数学論は「数学的概念が数学者（あるいは我々）の意識にいかなるかたちで把握されているか」に焦点を当てて数学に哲学的基盤を提供しようとする。（69頁）

つまり、数学的概念の起源を分析し、数学的対象の発生を問題にするのである。著者は第２章の終わりに、基本テーゼ２を踏襲したフッサールがこの立場に立つとき、ヴァイアーシュトラス・プログラムから受け取る課題を明記している。

課題Ｉａ 「自然数という数学の根本概念は我々の（数学者の）意識にどのように把握されているのか」

課題Ⅰｂ 「具体的事物のなす集合から自然数が獲得される過程である「抽象」とはいかなる過程か」

数学的概念の把握と定義の問題は、本書の第３部でも取り上げられる。そこでは、数学内部の問題解決の過程で生じ、素朴な抽象では把握できない数学的概念が考察される。そして、著者は第３章の終わりに、フッサールがヴァイアーシュトラス・プログラムから受け取る残りの課題を明記している。

課題Ⅱ 「自然数（や有理数）の無限集合によって定義される実数という数学的概念は、我々の（数学者の）意識にどのように把握されているのか」

課題Ⅲ 「「集合アプローチ」によって他の数学的対象の無限集合で定義される数学的概念は、我々の（数学者の）意識にどのように把握されているのか」

本書の第２部「フッサールの現象学創設の過程」で著者は、フッサールが課題解決のために、「抽象とは何か」「対象とは何か」という包括的な問いを立て、その哲学的考究のための方法論を構築していく過程を追跡していく。その出発点となる課題は、フッサールがヴァイアーシュトラス・プログラムから受け取ったものである。この研究ノートでは、そのヴァイアーシュトラス・プログラムを特徴付ける基本テーゼが、どのような経緯で定立されたかを明らかにした。

注

（１）鈴木俊洋『数学の現象学』（法政大学出版会、2013年）からの引用は、頁のみを記す。

（２）立松弘孝「フッサール その生涯と思想」、『現代思想臨時増刊号』第６巻第13号、青土社、1978年、250頁

（３）Gray, J., The Nineteenth-Century Revolution in Mathematical Ontology, in *Revolutions in Mathematics* ed. by Donald Gillies, Clarendon Press, 1992, p.243

（４）Hartimo, M., Mathematical Roots of Phenomenology: Husserl and the Concept of Number, Journal of History and Philosophy of Logic, Vol. 27(4), p.322

（５）Verley, J-L.「解析関数」（金子晃訳）、デュドネ編『数学史Ⅰ』、岩波書店、1985年、177頁

（６）クライン『19世紀の数学』（足立恒雄／浪川幸彦監訳）、共立出版、1995年、292頁-293頁

（７）前掲（６）、293頁

（８）佐々木力『数学史』、岩波書店、2010年、601頁-602頁

（９）近藤基吉／井関清志『近代数学［下］』、日本評論社、1986年、129頁

（10）前掲（９）、279頁

（11）前掲（９）、279頁

（12）Husserl, E., Beitrage zur Theorie der Variationsrechnung (Universitat Wien, 1882) ： 佐藤愛子訳「変分法への寄与」I, II, III,『数学文化』No.002(2004), 126-134、 No. 004(2005), 91-99、No.6(2006), 137-142

（13）Clebsch, A., Ueber die Reduktion der zweiten Variation auf ihre einfachste Form, J. für reine und angew. Math. 55 (1858), 254-273

（14）Mayer, A., Ueber die Kriterien der Maximums und Minimums der einfachen Integrale, J. für reine und angew. Math. 69 (1868), 238-263

（15）前掲（12）、No.002、132頁

（16）前掲（12）、No.004、95頁-96頁

（17）前掲（12）、No.006、138頁

(18) 前掲 (12)、No.006、142頁
(19) デュドネ編『数学史Ⅰ』、岩波書店、1985年、12頁
(20) ボタチーニ『解析学の歴史』(好田順治訳)、現代数学社、1990年
(21) Dugac,P.「解析学の基礎」(金子晃訳)、デュドネ編『数学史Ⅱ』、岩波書店、1985年385頁-456頁
(22) 前掲 (21)、385頁
(23) 前掲 (20)、54頁
(24) 前掲 (21)、390頁
(25) 前掲 (21)、391頁
(26) 前掲 (21)、391頁
(27) 前掲 (21)、391頁
(28) 前掲 (21)、392頁
(29) 前掲 (20)、124頁
(30) 前掲 (20)、124頁
(31) 前掲 (21)、414頁
(32) 前掲 (21)、416頁
(33) 前掲 (21)、415頁
(34) 前掲 (20)、96頁
(35) 前掲 (20)、100頁
(36) 前掲 (20)、127頁
(37) 前掲 (20)、97頁
(38) 前掲 (21)、419頁
(39) 前掲 (21)、419頁-426頁
(40) Schmit, R., *Husserls Philosophie der Mathematik. Platonistische und konstruktivistische Momente in Husserls Mathematikbegriff,* Bouvier, Bonn, 1981
(41) 榊原哲也『フッサール現象学の生成』、東京大学出版会、2009年、12頁-13頁
(42) 前掲 (41)、13頁
(43) 前掲 (41)、注31頁
(44) 前掲 (41)、13頁
(45) 前掲 (41)、14頁
(46) Bernays, P., On platonism in mathematics, 1935, in *Philosophy of Mathematics* ed. by Benaceraf, P. and Putnam, H., 258-294, Cambridge UP, 1983
(47) 前掲 (46)、p.258
(48) 前掲 (46)、p.259
(49) 前掲 (46)、p.258
(50) 前掲 (46)、p.259
(51) 前掲 (46)、p.259
(52) デービス/ヘルシュ『数学的経験』(柴垣和三雄/清水邦夫/田中裕訳)、森北出版、1986年、323頁

（53）前掲（46）、p.259

（54）前掲（21）、420頁

（55）前掲（21）、425頁

（56）前掲（２）、251頁

（57）前掲（２）、251頁

（58）前掲（２）、251頁

（59）Hill, C. O., Did Georg Cantor Influence Edmund Husserl?, 1997, *in Husserl or Frege?,* Hill, C. O. and Rosado Haddock, G.E., Open Court, 2000, p.137

（60）前掲（59）、p.141

（61）Cantor, G., Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 91(1887), 81-125; 92(1888), 240-265

（62）前掲（59）、p.143

（63）前掲（４）、p.335