

《論 文》

技術進歩推定モデルの検証

藤 井 路 子

はじめに

t期の生産関数を Eq.1 のように設定する。

$$Y_t = A_t \cdot F[K_t, L_t] \quad \dots \quad Eq.1$$

ここでは Y_t アウトプット、 K_t は資本インプット、 L_t は労働インプットを表す。 A_t は生産関数のシフト要因であるとともに、技術状態を表すパラメータである。

生産に関して収穫一定であるならば、Eq.1をEq.2のように書き換えることができる。ただし、 y_t は労働生産性 Y_t/L_t を、 k_t は資本労働比率 K_t/L_t を表す。

$$y_t = A_t \cdot f[k_t] \quad \dots \quad Eq.2$$

完全競争下における利潤最大化の必要条件から得られる

$$\frac{\partial y_t}{\partial k_t} = \frac{p_{Kt}}{Q_t} \quad \dots \quad Eq.3$$

の両辺に k_t/y_t を乗じて整理するとEq.4に示す関係式を得る¹。ここで Q_t はアウトプット価格、 p_{Kt} は、資本価格、 b_{kt} は資本分配率²を表している。

$$\frac{d \ln f}{d \ln k_t} = \frac{p_{Kt}}{Q_t} \cdot \frac{k_t}{y_t} \equiv b_{Kt} \quad \dots \quad \text{Eq.4}$$

次に Eq.2 の対数をとると $\ln y_t = \ln A_t + \ln f[k_t]$ を得る。これを時間について微分し、Eq.4 の関係式を適用すると次式を得る³。

$$\frac{d \ln y_t}{d t} = \frac{d \ln A_t}{d t} + b_{Kt} \frac{d \ln k_t}{d t} \quad \dots \quad \text{Eq.5}$$

$d \ln y_t / d t = (\partial y_t / \partial t) / y_t \equiv \dot{y}_t / y_t$, $d \ln A_t / d t = (\partial A_t / \partial t) / A_t \equiv \dot{A}_t / A_t$, $d \ln k_t / d t = (\partial k_t / \partial t) / k_t \equiv \dot{k}_t / k_t$ に留意して Eq.5 を書き直すとソロー残差と呼ばれる Eq.6 を得る⁴。

$$\frac{\dot{A}_t}{A_t} = \frac{\dot{y}_t}{y_t} - b_{Kt} \frac{\dot{k}_t}{k_t} \quad \dots \quad \text{Eq.6}$$

ソロー (1957) は、この関係式を用いて、1909 年から 1949 年までのアメリカの非農業部門を対象に、 A_t の変化率 (\dot{A}_t / A_t)、すなわち技術進歩率を計算した。しかしながら Eq.6 に示される b_{Kt} に、各期の資本分配率を直接当てはめて技術進歩率を逐次計算する方法は、資本ストックと資本価格の時系列を求めるという大がかりな作業が必要となる。このため「生産に関する収穫一定」、「生産者の利潤最大化」、「完全競争」の三条件から導かれる完全分配命題から、 $b_{Kt} = (1 - \text{各期の労働分配率})$ と

1 Eq.2 より $\partial y_t / \partial k_t = \partial f / \partial k_t$, $y_t = f$ に留意して Eq.3 を書き直したものの両辺に k_t / y_t を乗じて辺々を整理すると、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} (\partial f / \partial k_t) \cdot (k_t / f) &= (p_{Kt} / Q_t) \cdot (k_t / y_t) \\ (\partial f / f) \cdot (k_t / \partial k_t) &= (p_{Kt} / Q_t) \cdot (k_t / y_t) \\ \therefore d \ln f / d \ln k_t &= (p_{Kt} / Q_t) \cdot (k_t / y_t) \end{aligned}$$

2 $b_{Kt} = (p_{Kt} / Q_t) \cdot (k_t / y_t) = (p_{Kt} / Q_t) \cdot (k_t / y_t) \cdot (L_t / L_t) = (p_{Kt} / Q_t) \cdot (K_t / Y_t)$

3 $(d \ln y_t / d t) = (d \ln A_t / d t) + (d \ln f / d k_t) \cdot (d k_t / d t) = (d \ln A_t / d t) + (d \ln f / d k_t) \cdot (d k_t / d t) \cdot (k_t / k_t) = (d \ln A_t / d t) + (d \ln f / (d k_t / k_t)) \cdot ((d k_t / k_t) / d t) = (d \ln A_t / d t) + (d \ln f / d \ln k_t) \cdot (d \ln k_t / d t) = (d \ln A_t / d t) + b_{Kt} \cdot (d \ln k_t / d t)$

4 Haltmaier (1984) は、総生産関数が微分不能な場合の算出方法を提案している。

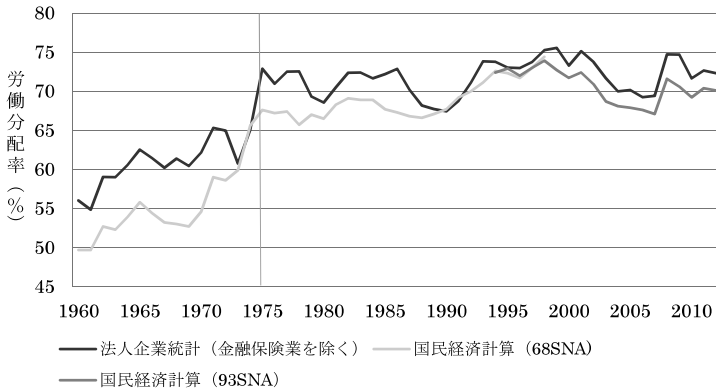
して逐次計算する方法も多くの研究において用いられている。

アウトプットの伸び率と、インプットの伸び率の残差として技術進歩率を求めるこれらの方法は、「生産に関する収穫一定」、「生産者の利潤最大化」、「完全競争」という3つの条件を前提とするものの、総生産関数を特定化する必要がないという意味で一般性を失わないという利点がある。これに対し、生産関数を特定化した上で、いくつかの条件を前提とせずに統計的分析を行い、技術変化率を推計することが、多くの研究で試みられている。

統計的分析においては離散データを用いるため、Eq.5はEq.5'のように書き換えられる⁵。

$$\Delta \log y_t = \Delta \log A_t + b_{Kt} \cdot \Delta \log k_t \quad \dots \quad Eq.5'$$

コブ = ダグラス型生産関数 $Y_t = A \cdot K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$ を仮定した Lehr&Lichtenberg' (1996) は、推計モデルを次のように特定化して技



Graph 1 労働分配率の推移 (年度)⁶

⁵ $\Delta \log y_t = \Delta(\log Y_t - \log L_t)$ 、 $\Delta \log k_t = \Delta(\log K_t - \log L_t)$ であることに留意すると、
 $\Delta \log y_t = \Delta \log A_t + b_{Kt} \cdot \Delta \log y$

⁶ データ出所:財務省「法人企業統計調査」(年報)、内閣府「国民経済計算」(年報)

術進歩率 α 、資本分配率 β_k 、労働分配率 β_L の推計を試みた。ただし u_t は攪乱項を表している。

$$\Delta \log y_t = \alpha + \beta_k \Delta \log k_t + u_t \quad \dots \quad \text{Eq.9}$$

ところで Eq.9 は、技術進歩率や要素分配率が推定期間を通じて一定であることを仮定しているが、これは妥当だといえるだろうか。

Graph 1 は、わが国における金融保険業を除いた労働分配率⁷の推移を示したものである。これによると、1970年代後半以降、労働分配率は70%前後でほぼ安定的に推移していることがわかる。このような期間に絞って推定を行うのであれば、モデルは妥当だと言える。だが技術進歩率を一定と仮定することは妥当だと言えるだろうか。この点について、以下のようなシミュレーションを通じて検証を行う。

Data Generation Process

労働インプット系列 $\{L_t\}$ を 5,000 から 12,000、資本インプット系列 $\{K_t\}$ を 3,000 から 10,000 の間で発生させる。ただしいずれも一様分布に従うものとする。

次に規模に関して収穫一定のコブ＝ダグラス型生産関数から、次に示す4つのアウトプット系列 $\{Y_t\}$ を生成する。ただしいずれの系列も $u_t \sim N(0,1)$ を満たす。

< Series 1 >

$$Y_t = 2 \cdot K_t^{2/3} \cdot L_t^{1/3} + u_t \quad (t = 1, \dots, 100)$$

< Series 2 >

$$Y_{1t} = 2 \cdot K_t^{2/3} \cdot L_t^{1/3} + u_t \quad (t = 1, \dots, 60)$$

$$Y_{2t} = 1.4 \cdot Y_{1t} \quad (t = 61, \dots, 100)$$

⁷ 労働分配率 = 人件費 ÷ 付加価値

人件費 = 役員給与 + 役員賞与 + 従業員給与 + 従業員賞与 + 福利厚生費

付加価値 = 人件費 + 営業純益 + 支払利息等 + 動産・不動産賃貸料 + 租税公課

< Series 3 >

$$Y_{1t} = 2 \cdot K_t^{2/3} \cdot L_t^{1/3} + u_t \quad (t = 1, \dots, 20)$$

$$Y_{2t} = 1.1 \cdot Y_{1t} \quad (t = 21, \dots, 40)$$

$$Y_{3t} = 1.05 \cdot Y_{2t} \quad (t = 41, \dots, 60)$$

$$Y_{4t} = 1.2 \cdot Y_{3t} \quad (t = 61 + 1, \dots, 80)$$

$$Y_{5t} = 1.05 \cdot Y_{4t} \quad (t = 81, \dots, 100)$$

< Series 4 >

$$Y_{1t} = 2 \cdot K_t^{2/3} \cdot L_t^{1/3} + u_t \quad (t = 1, \dots, 10)$$

$$Y_{2t} = 1.1 \cdot Y_{1t} \quad (t = 11, \dots, 20)$$

$$Y_{3t} = 1.05 \cdot Y_{2t} \quad (t = 21, \dots, 30)$$

$$Y_{4t} = 1.07 \cdot Y_{3t} \quad (t = 31, \dots, 40)$$

$$Y_{5t} = 1.05 \cdot Y_{4t} \quad (t = 41, \dots, 60)$$

$$Y_{6t} = 1.1 \cdot Y_{4t} \quad (t = 61, \dots, 70)$$

$$Y_{7t} = 1.08 \cdot Y_{4t} \quad (t = 71, \dots, 90)$$

$$Y_{8t} = 1.1 \cdot Y_{7t} \quad (t = 91, \dots, 100)$$

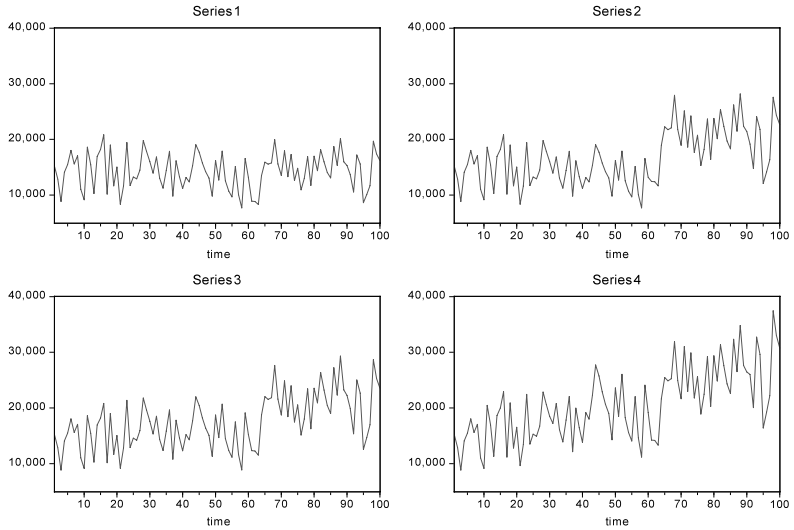


Figure 1 生成されたアウトプット系列

Figure 1 は、サンプル数を 100 として得た 4 つのアウトプット系列の推移を表したものである。Series 2 は $t=60$ 、Series 3 は $t=20, 40, 60, 80$ 、Series 4 は $t=10, 20, 30, 40, 60, 70, 90$ で技術変化が生じている。

また生成した $\{L_t\}$ 、 $\{K_t\}$ 、および、4 つのアウトプット系列 $\{Y_t\}$ から生成した労働生産性系列 $\{y_t\}$ 、および、資本労働比率系列 $\{k_t\}$ を 4 つのアウトプット系列のそれぞれについて散布図として表したのが Figure 2 である。Series 1 は全期間を通じて生産関数のシフト、すなわち、技術進歩がなかったこと、そして、Series 2 は 1 回、Series 3 は 4 回、Series 4 は 7 回ほど技術進歩があったことが読み取れる。

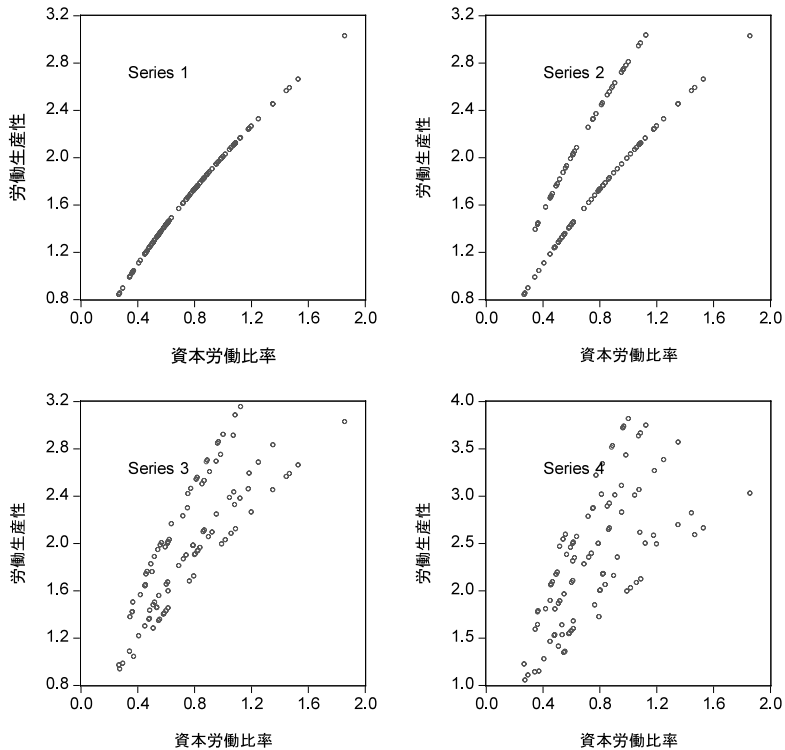


Figure 2 資本労働比率と労働生産性の関係 (サンプル数 = 100)

Estimation Model and Result

推定モデルを Est-Model.1 のように特定化し、Series 1 から 4 のそれぞれのケースについて、OLS 法を用いて推定を行う。

< Est-Model.1 >

$$\Delta \log y_t = \alpha + \beta \cdot \Delta \log k_t + e_t$$

Est-Model.1 から得られる技術進歩率の推定値 $\hat{\alpha}$ について、その傾向をみるため、労働生産性系列 $\{y_t\}$ 、および、資本労働比率系列 $\{k_t\}$ を生成して Est-Model.1 を推定するというプロセスを 1,000 回反復し、各プロセスで得られる $\hat{\alpha}$ の分布を示したのが Figure 2、 $\hat{\alpha}$ の t 値の分布を示したのが Figure 3、そしてそれぞれのプロセスで得られた決定係数の分布を示したのが Figure 4 である。

Figure 3, 4, 5 から示される通り、期間を通じて技術進歩がない系列、Series 1 の推定結果は良好なものであるといえる。Figure 3、および

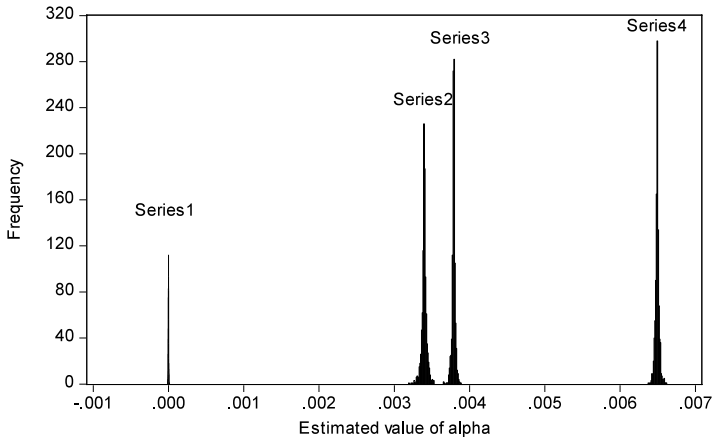


Figure 3 Est-Model 1 による技術進歩率の推定

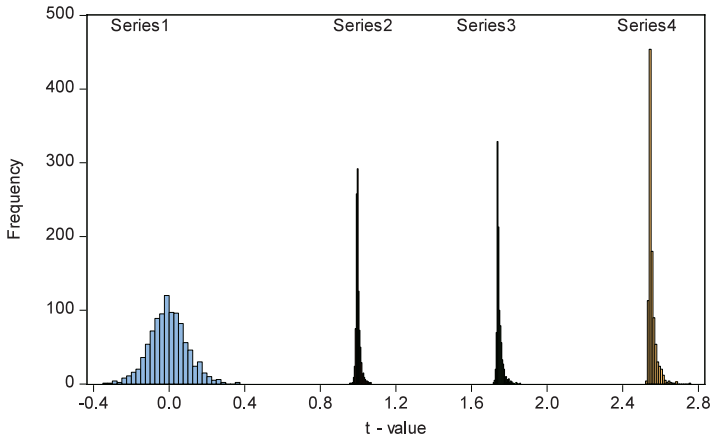


Figure 4 Est-Model.1 による技術進歩率推定値の t-value 分布

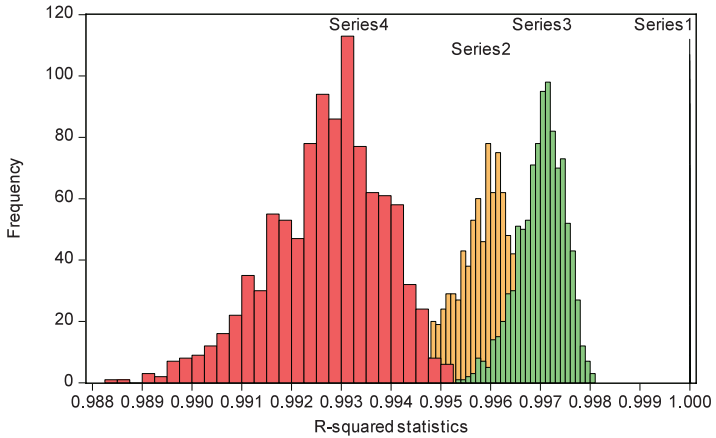


Figure 5 Est-Model.1 による決定係数の分布

Figure 4は技術進歩がないことを示しており、Figure 5からモデルの適合度も高いことがわかる。

一方、技術進歩が複数回にわたって発生する Series 2, 3, 4 のケースでは、モデルの適合度が低くなる傾向にある (Figure 5)。またいつ、どの程度の技術変化が生じたのか知るできない。

そこで推定モデルを技術進歩率が時間とともに変動することを織り込んだ Est-Model.2 のように特定化する。Est-Model.2 は状態空間モデルと呼ばれる。

< Est-Model.2 >

$$\Delta \log y_t = \alpha_t + \beta \cdot \Delta \log k_t + e_t$$

$$\alpha_{t+1} = \rho \cdot \alpha_t + e_t$$

本稿ではこれをカルマン・フィルター法によって解き、状態変数 $\{\alpha_t\}$ を求める。Figure 6 は得られる、状態変数 $\{\alpha_t\}$ 系列の推定値の傾向をみるため、先と同様、労働生産性系列 $\{y_t\}$ 、および、資本労働比率系列

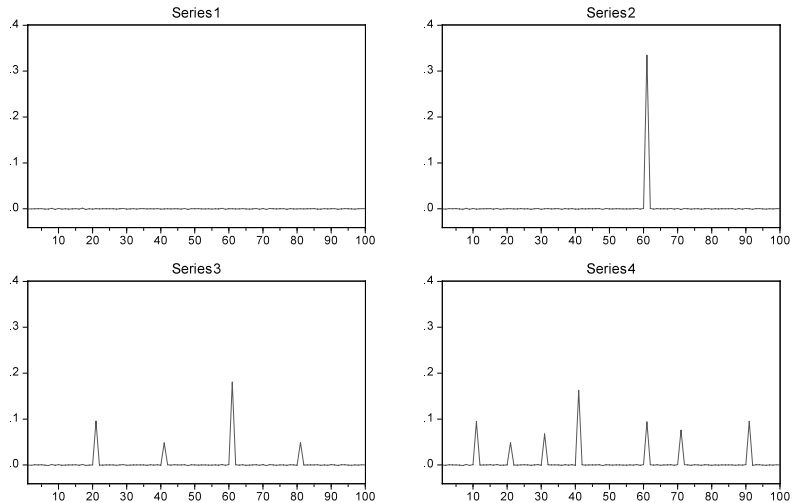


Figure 6 Est-Model.2 による技術進歩率の推定

$\{k_t\}$ を生成して Est-Model2 を推定するというプロセスを 1,000 回反復し、各プロセスで得られる状態変数 $\{\alpha_t\}$ 系列の平均値をプロットしたものである。

Series 1 は全期間を通じて技術進歩率がゼロという仮定でデータが生成されており、推計結果も概ねこれを正しく推定している。

Series 2 は $t=60$ で 40% の技術進歩が生じたという仮定でデータを生成している。そして Series 3 は、 $t=20$ で 10%、 $t=40$ で 5%、 $t=60$ で 20%、 $t=80$ で 5% の技術進歩が発生したという仮定で生成されており、Series 4 は、 $t=10$ で 10%、 $t=20$ で 5%、 $t=30$ で 7%、 $t=40$ で 5%、 $t=60$ で 10%、 $t=70$ で 8%、 $t=90$ で 10% の技術進歩が発生したという仮定で生成されている。Figure 6 は、これらの系列についても発生タイミング、および、技術進歩率の大きさについて概ね良好な結果を得ていることを示している。

おわりに

本稿では、「生産に関する収穫一定」、「生産者の利潤最大化」、「完全競争」という 3 つの条件から導かれるソロー残差の考え方をベースに、生産関数を特定化し、統計的手法を用いて技術進歩率を求める方法をとる場合、技術進歩率を示すパラメータを固定パラメータとするのではなく、変動パラメータとする状態空間モデルを用いる方が良好な結果を得ることを、シミュレーションによって検証した。

特に、技術変化が複数回にわたって生じるケースに状態空間モデルを適用すると、どのタイミングでどれくらいの変化が生じるかを明らかにすることが可能である。

ただ先にも述べたとおり、本稿で用いたモデルは 3 つのひじょうに厳しい条件を前提としているが、現実には必ずしもこれら条件が成立するものではない。これらが成立しないとき、モデルがどれほど良好な推定力

を維持できるかという点の検証は、今後の課題である。

参考文献

Solow,R.M., “Technical Change and the Aggregate Production Function” , The Review of economics and Statistics, Vol.39, Feb,1957, p.312-320

Hsing,M., “On the measurement of Aggregate Production Function” , Cambridge Journal of Economics, Vol.16, No.4, Dec.1992, pp.463-74.

Lehr,W. And Lichtenberg, F.R., “Computer Use and Productivity Growth in Federal Government Agencies 1987 to 1992” (NBER Working Paper) , no.5616,Jun.1996, p.20

谷崎久志, 『状態空間モデルの経済学への応用』, 日本経済新聞社, 1993

中嶋隆信, 『日本経済の生産性分析』, 日本経済新聞社, 2001

財務省「法人企業統計調査」(年報)

内閣府「国民経済計算」(年報)

